

脱层夹层梁附加状态的多项式解^{*}

刘祚秋¹, 富明慧²

(1. 中山大学地球科学系, 广东 广州 510275;
2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 把脱层夹层梁的应力状态分解为基本状态和附加状态, 利用高阶剪切变形理论, 建立了附加状态脱层段和未脱层段的控制方程并给出了附加状态脱层分析的多项式解法。实例分析表明, 除在过渡段外, 多项式解具有较好的精度。

关键词: 夹层梁; 脱层; 附加状态

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 04-0011-05

夹层结构具有比强度高、比刚度大等优点, 因而在现代工程中具有重要而广泛的应用。然而由于制造缺陷与使用荷载导致蒙皮与芯层在界面局部相脱离的现象是经常存在的, 而脱层尖端的应力集中和较大的变形则严重影响了夹层结构的力学行为, 这也是夹层结构失效的模式之一。过去十几年里, 有许多研究人员研究了脱层对夹层梁的影响^[1-9], 他们主要采用基于弹性理论的数值方法研究脱层梁的应力集中、屈曲和后屈曲; 文[6]提出了夹层梁脱层分析的一种简化模型, 它利用状态分解法将夹层梁的脱层分析转化为对原问题的“附加状态”的分析, 这种方法既抓住了问题的本质, 同时又简化了分析的难度, 因而这是一种好的处理方法。但是, 由于文[6]对芯层采用了“反平面”变形假设, 附加状态芯层内的横向剪应力被简化为均匀分布的, 而实际上附加状态的剪应力沿芯层厚度的变化是极不均匀的, “反平面”假设无法正确反映剪应力这种复杂分布。为此, 本文对芯层采用高阶剪切变形理论, 对夹

层梁脱层问题的附加状态重新进行了研究, 并得到了一些重要结论。

1 状态分解法及基本假设

如图 1(a) 所示夹层梁, 其蒙皮相对于芯层对称铺设。蒙皮 (skin) 为各向同性材料, 其杨氏模量为 E_f , 泊松比为 ν_f , 厚度为 t_f ; 芯层 (core) 为正交各向异性材料, 其杨氏模量 E_x, E_y , 泊松比 ν_{xy}, ν_{yx} , 横向剪切模量 G_{xz}, G_{yz} , 芯层厚度为 $2t_c$ 。以下为简便起见, 假设梁宽度为 1, 且处于平面应变 ($\epsilon_y = 0$) 状态。

现在假设上蒙皮与芯层之间存在一长度为 $2a$ 的脱层区, 脱层区将整个梁分为脱层段、未脱层段及介于二者之间的长度极小的过渡段。根据叠加原理, 含脱层的夹层梁在外载作用下的真实状态 (图 1(a)) 可分解为如下 2 个状态的叠加: 基本状态 (图 1(b)): 夹层梁不含脱层区、承受真实状态的

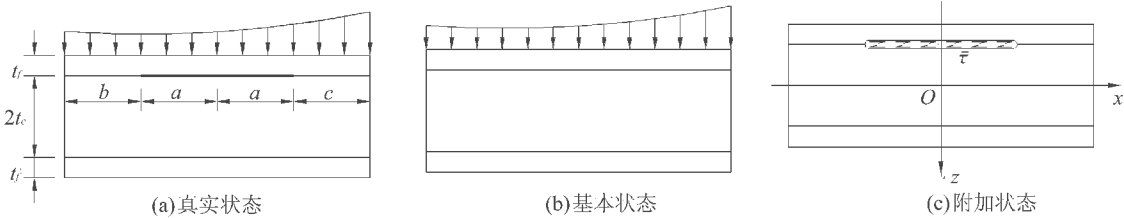


图 1 夹层梁脱层问题的状态分解示意图

Fig 1 The schematic diagram of state decomposition of sandwich beam on delamination problem

收稿日期: 2002-01-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19902022)

作者简介: 刘祚秋 (1965-), 男, 讲师, E-mail: liuzuqiu@263.net

横向载荷和支座反力; 附加状态(图 1(c)): 含脱层区的夹层梁, 但不承受横向载荷及支座反力, 而在脱层区的上、下界面上作用着一对剪应力, 该对剪应力与基本状态(图 1(a)) 中相应位置的剪应力大小相等, 方向相反。

基本状态不涉及脱层问题, 其分析方法已经比较成熟, 本文不再考虑; 附加状态是由于脱层所引起的, 这是本文研究的重点。

对于基本状态, 蒙皮主要抗弯, 芯层主要抗剪, “反平面” 假设能基本正确地描述芯层的变形规律; 而对于附加状态, 由于其受力特点与基本状态有显著的区别, 横向剪应力沿芯层的分布极不均匀, 此时 “反平面” 假设已经不符合芯层的变形特点, 因此必须对附加状态的芯层采用高阶剪切变形理论。

基于以上分析, 在本文中采用如下基本假设:

- (1) 蒙皮相对于芯层而言极薄, 假设其处于平面应力状态, 从而轴向正应力沿厚度均匀分布, 并且可忽略其抵抗横向剪力的能力;
- (2) 芯层内的横向剪应力沿厚度二次分布, 轴向位移沿厚度三次分布;
- (3) 忽略蒙皮和芯层厚度方向的变形和过渡段的影响。

建立如图 1 所示的直角坐标系, 其 x 轴为芯层的形心轴, y 轴位于脱层段内, 裂纹左右尖端的横坐标分别为 $-\alpha$, α 。由于脱层的存在, 结构变形时相对于中面的对称性被破坏, 中面不再是 “中性面”, 因此应考虑其水平位移。根据上述基本假设, 位移场可表示为:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x), (-t_f - t_c \leq z \leq -t_c) \\ u_2 &= u_0 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3, (-t_c < z < t_c) \\ u_3 &= u_0 + \alpha_c z + \beta_c z^2 + \gamma_c z^3, (t_c \leq z \leq t_c + t_f) \\ w_1 &= w_2 = w_3 = w(x) \end{aligned}$$

在本文中用下标 1, 2, 3 分别表示上蒙皮、芯层和下蒙皮的物理量。式中, $u_0 = u_0(x)$ 是中面上点的水平位移, $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ 是描述芯层 “法线” 变形的广义位移, w 为挠度。在上式中, 已经考虑了下蒙皮与芯层界面处的位移连续条件。

2 未脱层段的控制方程及解答

在未脱层段, 上蒙皮与芯层在交界面上应满足位移连续条件:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - t_c \alpha + t_c^2 \beta - t_c^3 \gamma \\ \text{记} \quad E_f^* &= \frac{E_f}{1 - \nu_f^2}, E_c^* = \frac{E_c}{1 - \nu_{cy} \nu_{cx}}, \end{aligned}$$

$$G_c = G_{cx}, \zeta = \frac{E_c^* t_c}{E_f^* t_f}$$

由于已经假设 $\epsilon_y = 0$, 故各层内的应力场可表达为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_f^* u_1' = E_f^* (u_0' - t_c \alpha' + t_c^2 \beta' - t_c^3 \gamma') \\ \sigma_2 &= E_c^* u_2' = E_c^* (u_0' + \alpha' + z^2 \beta' + z^3 \gamma') \\ \sigma_3 &= E_f^* u_3' = E_f^* (u_0' + t_c \alpha' + t_c^2 \beta' + t_c^3 \gamma') \\ \tau &= G_c \gamma_x = G_c \left[w' + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right] = \\ &G_c \left[w' + \alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 \right] \end{aligned}$$

其中 σ_i 为第 i 层的正应力, τ 为芯层内的剪应力, 根据假设 (1), 蒙皮中没有剪应力, 式中符号 “ $'$ ” 表示对坐标的导数。

由于附加状态(图 1(c)) 所受力系是自平衡力系, 故任意横截面(包括脱层段) 上的总轴力 N 、总弯矩 M 和总剪力 Q 均为零, 即

$$\left. \begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 = \\ \int_{-t_c-t_f}^{-t_c} \sigma_1 dz + \int_{-t_c}^{t_c} \sigma_2 dz + \int_{t_c}^{t_c+t_f} \sigma_3 dz &= 0 \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 = \\ \int_{-t_c-t_f}^{-t_c} \sigma_1 z dz + \int_{-t_c}^{t_c} \sigma_2 z dz + \int_{t_c}^{t_c+t_f} \sigma_3 z dz &= 0 \\ Q &= \int_{-t_c}^{t_c} \tau_x dz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, M_i , N_i ($i=1, 2, 3$) 分别是第 i 层形成的对芯层中面的力矩和第 i 层形成的轴力。

对于未脱层段, 由式 (1) 可得

$$(1 + \zeta) u_0' + (1 + \zeta \beta) t_c^2 \beta' = 0 \quad (2a)$$

$$(1 + \zeta \beta) \alpha' + (1 + \zeta \gamma) t_c^2 \gamma' = 0 \quad (2b)$$

$$w' + \alpha + t_c^2 \gamma = 0 \quad (2c)$$

利用 (2c) 式, 芯层内的剪应力可简化为

$$\tau = G_c [2\beta z + (3z^2 - t_c^2) \gamma] \quad (3)$$

对于未脱层段, 在位移表达式中, 共有 5 个独立的未知量, 式 (2) 提供了 3 个方程, 还需补充 2 个方程。通过分析如图 2 所示的芯层微段的平衡, 可得

$$\begin{aligned} N_2' + \tau|_{z=t_c} - \tau|_{z=-t_c} &= 0 \\ M_2' + t_c \left[\tau|_{z=t_c} + \tau|_{z=-t_c} \right] &= 0 \end{aligned}$$

将上式的 N_2' , M_2' 用位移表达, 并注意到式 (3), 可得

$$\begin{aligned} E_c^* (u_0'' + t_c^2 \beta'')/3 + 2G_c \beta &= 0 \\ E_c^* (\alpha''/3 + t_c^2 \gamma'')/5 + 2G_c \gamma &= 0 \\ \text{用式 (2a), (2b) 分别消去上式中的 } u_0'', \alpha'' & \\ \left. \begin{aligned} \beta'' - k^2 \beta &= 0, k = t_c^{-1} \sqrt{3(1 + \zeta) G_c / E_c^*} \\ \gamma'' - l^2 \gamma &= 0, l = t_c^{-1} \sqrt{15(1 + \zeta \beta) G_c / E_c^*} \end{aligned} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

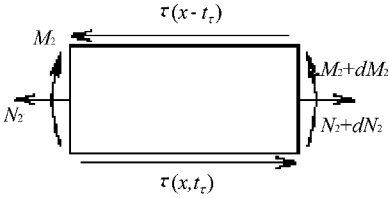


图 2 芯层微段的平衡

Fig 2 Equilibrium of tiny segment in core

上式的通解为

$$\beta = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}, \gamma = C_3 e^{-lx} + C_4 e^{lx} \quad (5)$$

由式(3)可确定出另外 3 个位移 u_0, α, w 的表达式。

$$\begin{aligned} u_0 &= C_5 - (1 + \zeta \beta) t_c^2 \beta / (1 + \zeta) \\ \alpha &= C_6 - (1 + \zeta \beta) t_c^2 \gamma / (1 + \zeta \beta) \\ w &= C_7 - \int_0^x (\alpha + t_c^2 \gamma) dx \end{aligned} \quad (6)$$

式(5),(6)中 $C_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ 均为待定常数。

3 脱层段的控制方程及解答

在附加状态的脱层面, 有 $\tau_c = -t_c = \bar{\tau}$ (为图 1(c) 所示的已知剪力), 即

$$2G_c t_c (-\beta + t_c \gamma) = \bar{\tau} \quad (7)$$

在脱层段, 上蒙皮与芯层在界面上不再满足位移连续条件, 因此式 (2a), (2b) 不再成立。由整个横截面上的总轴力和总弯矩仍为零, 可得

$$\left. \begin{aligned} N &= E_f^* t_f [u_1' + (1 + 2\zeta) u_0' + t_c \alpha' + (1 + 2\zeta \beta) t_c^2 \beta' + t_c^3 \gamma'] = 0 \\ M &= E_f^* t_f t_c [-u_1' + u_0' + (1 + 2\zeta \beta) t_c \alpha' + t_c^2 \beta' + (1 + 2\zeta \beta) t_c^3 \gamma'] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在(8)式中消去未知量 u_1 , 得

$$\begin{aligned} (1 + \zeta) u_0' + (1 + \zeta \beta) t_c \alpha' + (1 + \zeta \beta) t_c^2 \beta' + (1 + \zeta \beta) t_c^3 \gamma' &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

用式(4)、(7)消去(9)式中的 u_0, α, β 得

$$\gamma'' - m^2 \gamma = g(x) \quad (10)$$

其中, $m = t_c^{-1} \sqrt{(15/2 + 5\zeta) G_c / E_c^*}$,

$$g = \left[\frac{(15 + 5\zeta) t_c \bar{\tau}''}{32 G E_c} - \frac{15(1 + \zeta) \bar{\tau}}{16 E_c^*} \right]$$

(10) 式的通解为

$$\gamma = D_1 e^{-mx} + D_2 e^{mx} + \gamma(x) \quad (11)$$

其中, $\gamma(x) = \frac{(1 + \zeta) \bar{\tau}}{8(1 + 2\zeta \beta) G_c} - \frac{(1 + \zeta \beta) \bar{\tau}'' E G_c^*}{16(1 + 2\zeta \beta) G_c}$ 是一个特解。

通过对上蒙皮的平衡分析, 可得

$$E_f^* u_1' + \bar{\tau}(x) = 0 \quad (12)$$

式(12)的通解为

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{E_f^* t_f} \left[D_3 + D_4 x - \int_0^x \left(\int_0^x \bar{\tau} dx \right) dx \right] = \\ &= \frac{\zeta}{E_c^* t_c} \left[D_3 + D_4 x - \int_0^x \left(\int_0^x \bar{\tau} dx \right) dx \right] \end{aligned} \quad (13)$$

由式(7)和式(8)解出 u_0', α' , 并积分得

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= D_5 + \frac{1}{2 + \zeta} \left[- \left(1 + \frac{\zeta}{3} \right) t_c^2 \beta - \frac{1}{5} t_c^3 \gamma - \left(\frac{3}{2} + \frac{\zeta}{2} \right) \frac{u_1}{\zeta} \right] \\ \alpha &= D_6 + \frac{1}{2 + \zeta} \left[- t_c \beta - \left(\frac{9}{5} + \frac{3\zeta}{5} \right) t_c^2 \gamma + \left(\frac{3}{2} + \frac{3\zeta}{2} \right) \frac{u_1}{\zeta} \right] \\ w &= D_7 - \int_0^x (\alpha + t_c \gamma) dx \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在脱层段的位移表达式(11),(13),(14)中, 共有 7 个待定常数。

4 定解条件

现在对左未脱层段、脱层段和右未脱层段联合求解, 左未脱层段的量用上标“L”标记, 右未脱层段的量用上标“R”标记, 脱层段的量不作标记。3 段各含待定常数 7 个, 共计有 21 个待定常数。

首先, 为保证未脱层段内应力值是衰减的, 由式(5)应有

$$C_1^L = 0, C_3^L = 0, C_2^R = 0, C_4^R = 0$$

其次, 为限制刚体位移, 可令

$$D_5 = D_6 = D_7 = 0$$

由于过渡段(设其长度为 $\delta, \delta \leq \alpha$) 应力、位移变化剧烈, 因此在脱层段与未脱层段之间截面 $x = \pm \alpha$ 处, 位移和应力均存在明显的间断, 多项式解不可能准确描述该段位移与应力, 因此用下面方法给出如下“弱形式”的脱层段与未脱层段的位移与应力连续条件。

先考查在 $x = \alpha$ 截面上下蒙皮的应力连续条件。由上下蒙皮的平衡, 有

$$N_1(\alpha) = N_1^R(\alpha), N_3(\alpha) = N_3^R(\alpha)$$

同理, 在 $x = -\alpha$ 截面的应力连续条件可表为

$$N_1(-\alpha) = N_1^L(-\alpha), N_3(-\alpha) = N_3^L(-\alpha)$$

在 $x = \alpha$ 和 $x = -\alpha$ 截面, 上下蒙皮位移连续条件可表达为

$$\begin{aligned} u_1(\alpha) &= u_1^R(\alpha), u_3(\alpha) = u_3^R(\alpha) \\ u_1(-\alpha) &= u_1^L(-\alpha), u_3(-\alpha) = u_3^L(-\alpha) \\ w(\alpha) &= w^R(\alpha), w(-\alpha) = w^L(-\alpha) \end{aligned}$$

在 $x = \alpha$ 和 $x = -\alpha$ 截面, 芯层应力、位移连续条件可表达为

$$\sigma_2(\pm \alpha^-, z_k) = \sigma_2(\pm \alpha^+, z_k),$$
$$u_2(\pm \alpha^-, z_k) = u_2(\pm \alpha^+, z_k)$$

其中, $z_k = -t_c + \frac{k-1}{5}(1+\delta)t_c, (k=1, 2, 3),$
 $0 < \delta < 1$ 是这里引进的参数。

由以上的位移、应力连续条件, 可确定所有待定常数。

5 分析与结论

作为例子, 本文分析附加状态脱层面上的已知剪应力 τ 为常数这一情况, 此时附加状态是反对称的, 可仅分析问题的一半 (右半部分)。本文采用无量纲量, 取 $\tau=1, G_c/E_c^*=0.4, \alpha/t_c=1.5,$

$t_f/t_c=0.1, E_f/E_c=1000,$ 此时参数 $\zeta=0.01$ 。
首先研究脱层段及未脱层段横截面上的应力分布规律。本文在脱层段的 $[0, 0.9\alpha]$ 区域和未脱层段的 $[1.1\alpha, 2\alpha]$ 区域各取 6 个等间距的截面, 并将相应各截面上的应力沿芯层厚度的分布图直接在该截面上 (其中无量纲应力 σ_x 和 τ_{xy} 分别乘以比例因子 0.1 和 0.15)。在图 3 和图 4 中带阴影的曲线是本文的结果, 而虚线是有限元法的计算结果。
由图 3 和图 4 可见, 在靠近裂纹尖端 (从而属于过渡段) 的截面上, 本文结果与数值解有明显的差别; 而在距截面 $x=\alpha$ 稍远的截面上, 本文结果与数值解符合得非常好。

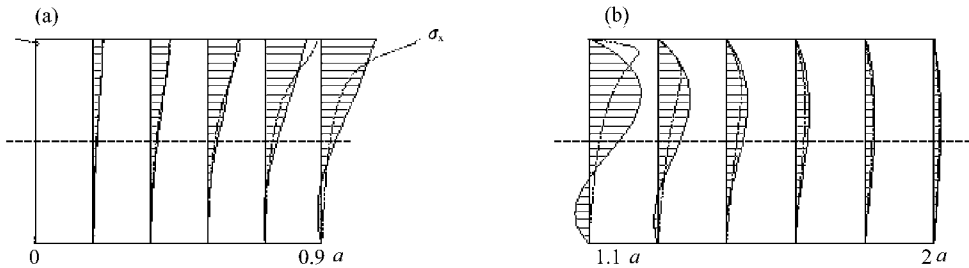


图 3 脱层段芯层内(a)和未脱层段芯层内(b)的 σ_x 分布
Fig. 3 Distribution of σ_x in delaminated segment(a) and undelaminated segment(b)

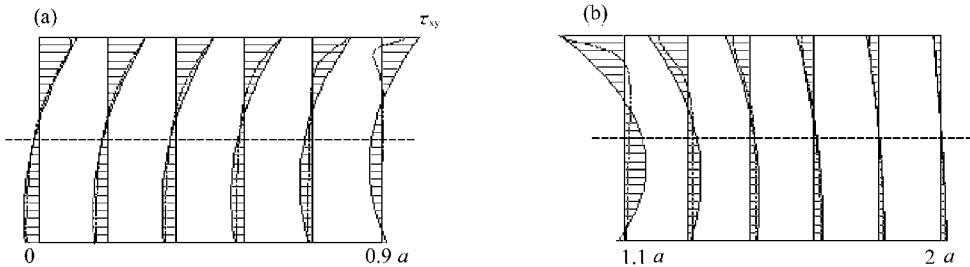


图 4 脱层段芯层内(a)和未脱层段芯层内(b)的 τ_{xy} 分布
Fig. 4 Distribution of τ_{xy} in delaminated segment(a) and undelaminated segment(b)

通过以上分析, 得到如下结论:
(1) 芯层内的轴向正应力是维持附加状态平衡的重要因素, 不宜将其忽略;
(2) 附加状态的轴向正应力和横向剪应力的分布规律与无脱层的基本状态显著地不同, 因而分析夹层梁的一些常规的方法可能不适用于附加状态;
(3) 附加应力随着远离脱层段而按指数率规律迅速地衰减。

参考文献:

[1] CARLSSON L A, PRASAD S. Interfacial fracture of sandwich beams[J] . Engineering Fracture Mechanics, 1993, 44 (4): 581—590.

[2] CARLSSON L A, SENDLEIN L S, MERRY S L. Characterization of race sheet/core shear fracture of composite sandwich beams[J] . Comp Mat, 1991, 25(1): 101—116.
[3] HWU C, HU J S. Buckling and postbuckling of delaminated composite sandwich beams[J] . AIAA J, 1992, 30(7): 1901.
[4] SOMERS M, WELLER T, ABRAMOVICH H. Buckling and postbuckling behavior of delaminated sandwich beams[J] . Comp Struct, 1992, 21: 211—232.
[5] KIN H J. Postbuckling analysis of composite laminates with a delamination[J] . Comput Struct, 1997, 52: 975—983.
[6] 王奇志, 孟庆春, 张行. 复合材料层合梁分层问题解析解[J] . 北京航空航天大学学报, 1998, 24(3): 319.

(下转第 19 页)

Indentifiability of Dynamical System
of Flexible Space Structure

XU Jian guo

(Department of Information Science and Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract: The indentifiability of the system of flexible space structures is studied. According to the basic behavior of the infinite dimensional dynamical system, the sufficient condition and necessary condition of the indentifiability are obtained under two modes of the observer by means of the functional space analysis. The comparison between the conditions of controllability and observability is done.

Key words: flexible structural system; indentifiability; functional space method

(上接第 14 页)

Polynomial Solution to Delaminated Sandwich Beams in Additional State

LIU Zuo qiu¹, FU Ming hui²

(1. Department of Earth Science, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering,

Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The stress /strain state of the delaminated sandwich beams is decomposed into two states: basic state and additional state. The additional state of delaminated sandwich beams is investigated using the theory of high order shear deformation. Differential equations of delaminated and undelaminated sectors are formulated and the polynomial solution to additional state is obtained. The actual example also shows that the polynomial solution above is precise in the whole beam domain except the transitional area.

Key words: sandwich beam; delamination; additional state