

三分 Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度的估计

贾保国¹, 周作领², 朱智伟¹

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;

2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 借助于部分估计原理和质量分布原理, 证明了三分 Cantor 集 C 自乘积集 $C \times C$ 的 Hausdorff 测度满足

$$1.483\ 29 \leq H^{\log_3 4}(C \times C) \leq 1.502\ 88.$$

关键词: 自相似集; Hausdorff 维数与测度; Cantor 集**中图分类号:** O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 03-0109-02

计算与估计分形集的 Hausdorff 维数与测度是分形几何研究的重要内容之一, 一般地说, 计算分形的 Hausdorff 维数, 特别是计算 Hausdorff 测度是非常困难的, 在满足开集条件下, 自相似集的 Hausdorff 维数已被完全确定^[1]. 但就在这种情形, Hausdorff 测度的计算与估计, 除直线上 Cantor 集及其种种变形之外, 也几乎无任何结果^[2-4]. 文献[5]首先得到维数为1的一种 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度的准确值, 文献[6]又把这个结果推广到维数不大于1的情形. 到目前为止, 尚无任何维数大于1的分形的 Hausdorff 测度被确定(含给出计算表达式). 本文研究了三分 Cantor 集 C 的自乘积集 $C \times C$ (维数大于1) 的 Hausdorff 测度, 得到了 $H(C \times C)$ 的一个较好的估计. 本文证明细节将另行给出.

1 三分 Cantor 集 C 自乘积集的 Hausdorff 测度

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上取单位正方形 E_0 , 在 E_0 上除了保留4个角上边长为 $1/3$ 的小正方形外删去其余部分的内部, 得到4个边长为 $1/3$ 的小正方形的集合记为 E_1 , 对 E_1 中的每个正方形重复上述过程得到的集合记为 E_2 , 无限重复上述过程, 得到

$$E_0 \supset E_1 \supset \cdots E_n \supset \cdots$$

非空集合 $C \times C = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ 即为 Cantor 集 C 的自乘积集, 它是由4个相似比为 $1/3$ 的相似压缩函数生成的自相似集且满足开集条件, 因此, $C \times C$ 的 Hausdorff 维数 $s = \dim_H(C \times C)$ 满足: $4(1/3)^s = 1$. 即 $1 < s = \log_3 4 < 2$. 本文的主要结果是

定理 三分 Cantor 集的自乘积集 $C \times C$ 的

Hausdorff 测度满足不等式

$$1.483\ 29 \leq H^{\log_3 4}(C \times C) \leq 1.502\ 88$$

为了证明此定理, 叙述若干命题和引理.

命题 1^[1] 设 $s = \log_3 4$, 则对任何 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, \infty)$, 有

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right]^s &\leq \frac{x_1^s + x_2^s + x_3^s}{3} \\ \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right]^s &\leq \frac{x_1^s + x_2^s + x_3^s + x_4^s}{4} \end{aligned} \right.$$

命题 2^[4] 设 $F = C \times C$, $U \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集且 $|U| > 0$, 则

$$H^s(F \cap U) \leq |U|^s$$

对 $n \geq 0$, E_n 由 4^n 个边长为 $1/3^n$ 的正方形组成, 每个这样的正方形称为基本正方形, 记为 $\square_n$. 在 E_n 上定义分布函数 μ , 满足

$$\left\{ \begin{aligned} \mu(E_0) &= 2^{s/2} \\ \mu(\square_n) &= \frac{1}{4^n} \cdot 2^{s/2} \\ \mu(E_0 - C \times C) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right.$$

则 μ 为 E_0 上的一个测度且 μ 为 $C \times C$ 上的一个质量分布, 如图1建立直角坐标系.

$C \times C$ 和 x 轴上的 $[0, 1]$ 区间的交是三分 Cantor 集 C , $E_n \cap [0, 1]$ 由 2^n 个长为 $1/3^n$ 的闭区间组成(图2), 它们称作 $E_n \cap [0, 1]$ 的基本区间, 记作 I_n . 在 $[0, 1]$ 上定义分布函数 μ_1

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1([0, 1]) &= 1 \\ \mu_1(I_n) &= 1/2^n \\ \mu_1([0, 1] - C) &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right.$$

* 收稿日期: 2001-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10041005); 教育部博士点基金资助项目(1999055810); 广东省自然科学基金项目(011221); 中山大学高等学术研究中心资助项目(01M2)

作者简介: 贾保国(1963-), 男, 副教授; E-mail: mcsjbg@zsu.edu.cn

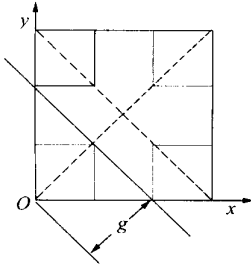


图 1 直角坐标系的建立

Fig. 1 An orthogonal coordinate system

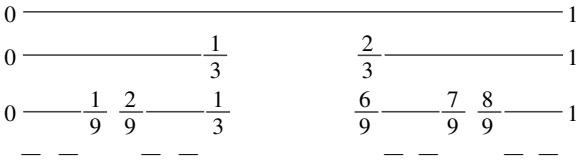


图 2 三分 Cantor 集的构造

Fig. 2 Construction of the third Cantor set

$\mu_1([0, x])$ 是 $[0, 1]$ 上的单调增函数。 μ_1 为 C 上的一个质量分布。

引理 1 对任何 $x \in [0, 1]$ 有

$$\mu_1([0, x]) \geq \frac{2}{2^s} x^s$$

为了以后的应用, 本文还给出下面的推论。

推论 对任何 $x \in (0, 1/3]$, 有

$$\mu_1([0, x]) \geq \frac{4}{2^s} x^s$$

如图 1, 设 G 为平行于 E_0 的斜对角线且与 E_0 相交的直线, 记原点到 G 的距离 $d((0, 0), G) = g \geq 0$, G 与 x 轴, y 轴围成的三角形为 $\triangle_g$ 。

引理 2 $\mu(\triangle_g) \geq 0.9836g^s, 0 \leq g \leq \sqrt{2}/3$ 。

由引理 1 和引理 2 可以证明下面的引理 3。

引理 3 对任何可测集合 V , 有

$$\mu(V) \leq 1.044 |V|^s$$

2 主要定理的证明

定理的证明, 由引理 3 和质量分布原理^[1]可以证明左边的不等式。

由文献 [4] 的部分估计原理可以证明右边的不等式。

参考文献:

- [1] FALCONER K. Fractal geometry mathematical foundations and applications[M]. New York: John & Sons, 1990.
- [2] 周作领. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 自然科学进展, 1997, 7(4): 405—409.
- [3] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A), 1997, 27(6): 491—496.
- [4] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度—Koch 曲线[J]. 中国科学(A), 1998, 28(2): 103—107.
- [5] ZHOU Z L, WU M. The Hausdorff measure of a Sierpinski carpet[J]. Sci China A, 1999, 42(6): 673—680.
- [6] ZHU Y C, LUO J. The Hausdorff measure of generalized Sierpinski carpets, approximation theory and its applications[J]. 2000, 16(2): 13—18.

The Hausdorff Measure of the Cartesian Product of the Middle Third Cantor Set with Itself

JIA Bao guo¹, ZHOU Zuo ling², ZHU Zhi wei¹

(1. School of Mathematics and Computing, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;

2. Lingnan College, Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For the Hausdorff measure of the Cartesian product of the middle third Cantor set with itself, by the part estimation principle and the mass distribution principle, the following estimation

$$1.48329 \leq H^{\log_3 4}(C \times C) \leq 1.50288$$

is obtained.

Key words: self similar set; Hausdorff dimension and measure; Cantor set