

钢索结构计算的有限分析法*

姜清海¹, 郭金基², 宁松凯¹, 张开成¹, 陈海², 蔡明²

(1. 中山盛兴幕墙有限公司, 广东 中山 528412;
2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 阐述钢索结构的内力及位移计算的有限分析法。将钢索分成任意小单元, 建立小单元受力的平衡方程和位移方程, 利用钢索端部边界条件和单元体之间内力及位移的连接条件, 建立初参数的传递矩阵化为数值解。还研制计算机软件用逐次逼近法进行数值计算, 最后给出了算例。

关键词: 钢索结构; 有限分析法; 传递矩阵; 逐次逼近; 计算机软件

中图分类号: TP391.75 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 05-0015-04

点式玻璃幕墙拉索结构的计算, 目前常用的有“代梁法”, 引用简支梁中点最大弯矩来构造一梁, 梁的中点矢高代替实际结构的矢高, 与实际情况相差较大, 存在明显的缺陷。由于钢索结构必须考虑变形后的几何形状列出平衡方程, 给计算带来困难, 通常不采用有限单元法(FE), 有限差分法(FD)求解。本文采用有限分析法(FA)求解, 其实质上是将局部分析解与全局数值解相结合的方法^{1,2}。

1 计算的简化模型

点式玻璃幕墙, 承受①以100年周期设计, 基本风压0.45 kPa, 瞬时风压阵风系数2.25, 标高选取 h_m , 地面粗糙度选取B类, 体型系数为1.5的水平风荷载 $W_s^{1.3}$; ②七级地震水平作用的地震荷载 q_{ek} ; ③温度应力 σ_T ; ④自重荷载 q_w 的作用。假设全部荷载垂直作用于玻璃表面并均匀分布:

$$q = 1.4W_k + 0.6 \times 1.3 \times q_{ek} + q_w \quad (1)$$

玻璃幕墙简化为薄板, 边界采用点式支承, 在均布荷载作用下的等主应力彩色云图及支承的反力的计算见文[4]。不锈钢索结构如图1所示, 它由正、负高斯曲率两条不锈钢索, 通过抓爪及不锈钢棒联结组成鱼腹式结构, 承受正、负风压由点式支承座传递的作用力。本文仅讨论正风压的情况, 作用力在图1中为水平方向, 并考虑雨篷传递的垂直方向面荷载, 简化为垂直方向的作用力以及考虑不锈钢索自重荷载均作用在垂直方向(见图1)。

假设钢索处于弹性状态, 在上述外力作用下产生变形。钢索任取一段微弧(记为 n 段), 微弧长度记

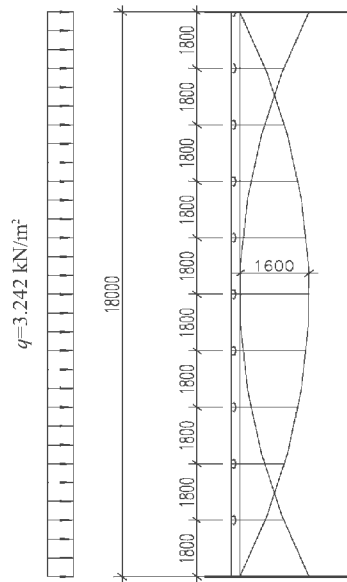


图1 点式玻璃幕墙不锈钢索结构示意图

Fig. 1 The structure of the point supported glass curtain wall

为 Δs , 伸长量为 Δu , 承受 P_n 及 Q_n 荷载的作用(见图2)。微弧段的应变与应力之间应满足虎克定律:

$$\frac{T}{A} = \frac{E\Delta u}{\Delta s}$$

当 Δs 充分小时, 得:

$$\frac{du}{ds} = \frac{T(u, s)}{EA} \quad (2)$$

式中, A 为钢索截面积, $u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$ 为沿弧长方向的位移, u_x, u_z , 分别为 x, z 方向位移分量; E 为钢索杨氏模量; T 为钢索在 S 点的张力。

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} \quad (3)$$

* 收稿日期: 2002-02-10

作者简介: 姜清海(1967年生), 男, 硕士, 工程师, E-mail: jqh2000@21cn.com

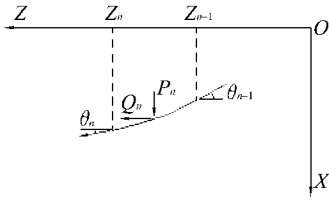


图 2 钢索微弧段的受力

Fig 2 The forces on wire micro-segment

式中, T_n, T_{n-1} 分别为微弧段两端作用的力。依据作用在微弧段受力的平衡条件: $\sum F_z = 0, \sum F_x = 0$, 来确定, 可得:

$$\left. \begin{aligned} T_{n-1} \sin \theta_{n-1} - T_n \sin \theta_n &= P_n \\ T_{n-1} \cos \theta_{n-1} - T_n \cos \theta_n &= Q_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, θ_{n-1}, θ_n 分别由微弧段 $n-1, n$ 点的切线斜率决定。钢索在外力作用下, 外形的几何形状不能维持不变, 而且变形较大, 通常张力 T 是弧长变量 S 及位移 u 的非线性函数, 因而(2)式是非线性的, 求解较困难, 本文采用有限分析法求解。

2 有限分析的计算方法

如何寻求钢索变形后的曲线是求解钢索的关键。本文先设定初始的变形曲线, 用有限分析法将钢索分成有限段小单元, 弧长为 ΔS_n , 当弧长充分小时可用直线逼近, 在此小微弧段, 张力 T 看作是常量, 由两端点的 T_{n-1}, T_n 及外力决定其数值。于是(2)式化为线性方程, 可得分析解, 微弧段端点可得 u_{n-1}, u_n 值。在单元之间连接点要求满足位移 u 及张力 T 的连续条件; 微弧段单元内满足 T 的平衡条件, 可以建立传递矩阵化为数值解。在钢索两端应该满足位移约束条件, 但由于初始设定的变形曲线未必是真实的变形曲线, 由它决定的张力 T 未必能满足位移约束条件, 因而可用计算机程序逐次逼近法求解, 最后决定张力及位移。

钢索两端点边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } z = 0 \text{ 时, } T = T_0, u = u_0 = 0 \\ \text{当 } z = l \text{ 时, } T = T_L, u = u_L = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, T_0 为起始端的张力, T_L 为末端的张力, 当设定变形曲线及给出外力后, 可由总体平衡条件事先求出。

将钢索分成 N 个有限段小单元, 当 N 数值较大时, 小单元长度充分小, 可用折线代替弧线。任意选取第 n 段及点 n , 在此单元段 $\theta_n \approx \theta_{n-1}$, 张力 T_n 看作是常量, 可以通过(4)式近似求得, 方程式(2)变为线性方程, 位移 u 可以通过积分用起始端张力 T_0 和

逐段端点张力求出再进行迭加, 可得:

$$u = \frac{T_0 S}{EA} - \left\|_{z=z_1} \frac{P_1(S-S_1)}{EA \sin \theta_1} - \left\|_{z=z_2} \frac{P_2(S-S_2)}{EA \sin \theta_2} - \dots - \left\|_{z=z_n} \frac{P_n(S-S_n)}{EA \sin \theta_n} \quad (6)$$

式中, S 为曲线坐标, $S_1, S_2 \dots S_n$ 分别为与 $Z_1, Z_2 \dots Z_n$ 相对应的点的曲线坐标; $\left\|_{z=z_i}$ 表示该项通过 $Z = Z_i$ 点后, 该项对 u 产生影响, 开始计算 u 值。

通过小单元之间结点的位移 u 及张力 T 的连续条件和小单元(段)内的平衡条件及变形几何条件, 可以建立小单元(段)及结点的传递矩阵:

$$\begin{aligned} n \text{ 段: } & \begin{cases} T_m \\ u_m \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ T_0 \left\{ \frac{1}{S_1 + S_2 + \dots + S} \right\} - \left\{ \frac{P_1}{\sin \theta_1} + \dots + \frac{P_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \right\} S \end{cases} \\ \begin{cases} T_{n-1} \\ u_{n-1} \end{cases} & + \begin{cases} 0 \\ T_0 \left\{ \frac{1}{S_1 + S_2 + \dots + S} \right\} - \left\{ \frac{P_1}{\sin \theta_1} + \dots + \frac{P_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \right\} S \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ T_0 \left\{ \frac{1}{S_1 + S_2 + \dots + S} \right\} - \left\{ \frac{P_1}{\sin \theta_1} + \dots + \frac{P_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \right\} S \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{结点 } n: & \begin{cases} T_{n+1, n} \\ u_{n+1, n} \end{cases} = \begin{cases} T_m \\ u_{nn} \end{cases} + \begin{cases} \frac{P_n}{\sin \theta_n} \\ 0 \end{cases} = T_0 \begin{cases} 1 \\ \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{EA} \end{cases} - \begin{cases} \frac{P_1}{\sin \theta_1} + \frac{P_2}{\sin \theta_2} + \dots + \frac{P_n}{\sin \theta_n} \\ \frac{P_1(S_2 + \dots + S_n)}{EA \sin \theta_1} + \dots + \frac{P_{n-1} S_n}{EA \sin \theta_{n-1}} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

为了简单起见, 以上各式未写出 Q_i 载荷作用对 u, T 的影响。如果 Q_i 存在时, 应按(4)式补加进传递矩阵中。

以上计算编制计算机程序进行, 可以快速求出各单元结点 ($n = 1, 2, \dots, N$) 的 T_n, u_n 值, 要求:

$$|u_n - u_L| < \epsilon_1, |T_n - T_L| < \epsilon_2 \quad (9)$$

式中, u_n, T_n 由端点边界条件或中点连接条件给定。依据给出的计算精度 (ϵ_1), (ϵ_2), 验证计算值是否为精确的张力及位移。但由于初始设定的变形曲线未必是真实的变形曲线, 计算结果必然带来明显的误差, 钢索端部 u_n, T_n 未必能满足(9)式条件, 因此必须进行第 2 轮计算。

依据(8)式算出各单元结点的位移 u_n , 第 1 轮计算的变形曲线坐标由下式确定:

$$\begin{aligned} x &= x_n + u_n \sin \theta_n \\ z &= z_n + u_n \cos \theta_n \end{aligned} \quad (10)$$

式中, z_n, x_n 为初始设定变形曲线在结点 n 的坐标。

以第 1 轮计算的变形曲线, 用有限分析法重复上述计算, 得到第 2 轮的 T_n, u_n 计算值及变形曲线, 并用(9)式验证计算结果。依此计算下去逐级逼近可以得到满足给定计算精度的数值解 u_n, T_n 值及变形曲线。

3 计算软件、算例及应用

3.1 计算软件系统

根据以上有限分析法的理论分析, 本文选择 Microsoft Visual C++ 6.0 语言作为开发工具, 直接在 Windows 平台上进行开发 FA 法计算机软件系统。系统具备有如下特点: ① 图形化界面, 应用 Windows 菜单, 标准对话框输入前处理系统程序; ② 动态录入荷载信息、种类、坐标, 钢索基本参数信息、自动生成计算文件; ③ 编制源程序, 快速进行数值计算; ④ 后处理操作系统, 自动输出钢索张力、位移报表、位移图和原始计算数据及信息; ⑤ 输出图形、报表和全部资料, 具备打印功能; ⑥ 执行文件 .exe, 加密, 提交面向用户的软盘。

3.2 算例 1

某钢索结构工程: 钢索杨氏模量 $E=1.8 \times 10^5$ MPa, 直径 $\phi=10$ mm, 长度 $l=10$ m, 初始挠度曲线 $x = az(l-z)$, $a=0.048/m$, 受力 $P_1=P_3=5$ kN, $P_2=10$ kN, 如图 3(a)所示, 试计算钢索张力及变形后曲线。

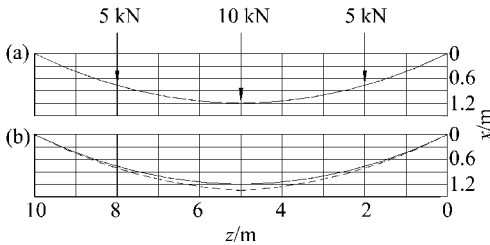


图 3 钢索结构的计算

Fig. 3 Calculation of wire rope structure

根据 FA 法计算软件, 输入钢索基本参数:

形状 a, l, E, A ;

荷载类型数值: $P_1, P_2, P_3(5, 10, 5)$;

坐标: $Z_i(2, 5, 8)$, 自动生成计算文件单元数 $n=200$, 源程序进行快速运算; 输出张力及位移报表(略), 变形后挠度曲线为图3(b)虚线所示。

最大挠度 $\delta=3.132$ mm;

张力 $T_A=T_B=23.109$ kN。

平衡校核: 根据变形后的挠度曲线

$$\theta_A = \theta_B = 25^\circ 32'$$

$$\sin \theta_A = 0.43097, \cos \theta_A = 0.90237,$$

$$\sum F_z = 0, T_A \cos \theta_A + T_B \cos \theta_B = 0;$$

$$\sum F_x = 0,$$

$$T_A \sin \theta_A + T_B \sin \theta_B =$$

$$19.9186 = \sum_{i=1}^3 P_i = 20 \text{ (kN)}$$

x 向误差为 0.4% , z 向误差为 0 , 满足平衡条件, 计算结果正确。

3.3 算例 2

某电力大厦幕墙招标工程, 采用点式玻璃幕墙鱼腹式钢索结构。钢索杨氏模量为 $E=1.8 \times 10^5$ MPa, 直径 $\phi=20$ mm, 长度 $l=18.9$ m, 初始挠度曲线 $x = az(l-z)$, $a=0.01792/m$ 。承受正风压, 经计算支座反力后, 通过抓爪不锈钢棒传递到钢索的作用力: $P_1=4.536$ kN; $P_2, P_3, P_5, P_6, P_8, P_9, P_{11}, P_{12}, P_{14}, P_{15}$ 为 9.987 kN; P_4, P_7, P_{10}, P_{13} 为 9.072 kN。钢索自重荷载 ρ 为 16 N/m 化为均布荷载分摊到小单元结点上, 并预加张力, 两项合并 $G_i=1.1$ kN ($i=1, \dots, 16; z$ 向)。在 $z=11.2$ m 还承受雨篷传递均布荷载支承的合力 34.27 kN, 方向为 z 的负向; 在该点与 G_{10} 迭加后作用力为 $R=-33.17$ kN。诸荷载作用点位置见图 4, 试计算钢索结构的张力及平衡校核。

根据编制的 FA 计算软件, 输入钢索基本参数。

形状: a, l, E, A ;

荷载信息类型: P_1, Q_i, G_i ;

坐标: Z_i ;

自动生成计算文件。小单元选取 $n=800$, 源程序快速进行运算;

输出 $n=801$, 结点张力 T_i 及位移 U_i 数值报表(略):

$$Z=0, \alpha=18^\circ 8'; Z=18.9, \alpha=20^\circ 22'$$

$$T_1=200.505 \text{ kN}, T_2=221.479 \text{ kN}$$

平衡校核:

$$\sin \alpha_1 = 0.311150, \cos \alpha_1 = 0.950362$$

$$\sin \alpha_2 = 0.347619, \cos \alpha_2 = 0.937536$$

$$\sum F_x = 0, T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = 139.377 =$$

$$\sum_{i=1}^{16} P_i = 140.48 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_z = 0, T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 17.114 =$$

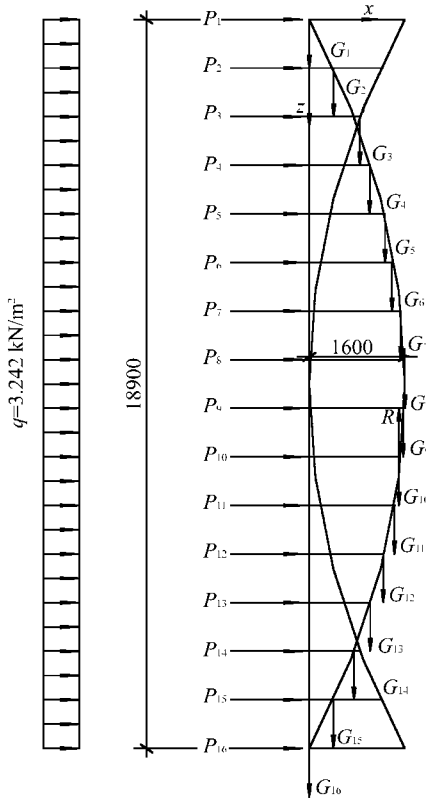


图 4 鱼腹式钢索结构示意图

Fig 4 The structure of the fishbelly wire rope

$$Q - \sum_{i=1}^{16} G_i = 17.77 \text{ (kN)}$$

x 向误差 0.78%, z 向误差为 3.69%, 满足平衡条件, 计算结果正确。

钢索结构广泛应用于起重机械、制动机构、桥梁工程及点式幕墙钢索结构工程。本文研制的 FA 法计算机软件系统, 还应用于某会展中心玻璃幕墙制安工程中 19 种钢索结构的计算, 某剧院扩建工程第 2 标段幕墙工程钢索(杆)的计算。本文研制的计算机软件系统, 除了鱼腹式钢索结构外, 还包括水平单索各种荷载作用的结构、单索折线形、各种曲线形状及拉杆结构在多种载荷作用的结构, 内容较丰富, 操作简便, 运算速度快, 计算精度高等。本文用有限分析法首次计算点式幕墙钢索结构, 提供新的计算方法, 技术先进, 具有重要的实用价值及广阔的市场应用前景。

参考文献:

[1] 郭金基. 变截面开口薄壁杆件的有限分析法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1985, 24(4): 39-50.
 [2] GUO J J. Finite analysis method for solving variable thin wall bridge with microcomputer [C]. Epmesc Proceeding Macau 1985. 1985: 345-350.
 [3] 中国建筑科学院. 玻璃幕墙工程技术规范(JGJ102-96) [S]. 北京: 中国建筑工程出版社, 1996.
 [4] 姜清海, 刘祚秋, 郭金基, 等. 高层建筑玻璃幕墙简化模型的计算[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2001, 28(4): 109-112.

A Finite Analysis Calculation Method of the Wire Rope Structure

JIANG Qing hai¹, GUO Jin ji², NING Song kai¹, ZHANG Kai cheng¹, CHEN Hai², CAI Ming²

(1. Zhongshan Shengxing Curtain Wall Co. Ltd, Zhongshan 528412, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat'sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A finite analysis calculation method of the internal force and displacement on the wire rope structure is presented. The wire rope is divided into a series of discretional units, and the equations of the balance and displacement in those units are constituted. With the confined condition on the top of the wire rope and the connected condition on the internal force and displacement between those units, the transfer matrix of the original parameter is computed and evolved as well as the numerical value. By the method of gradual approach, the computer software is developed for the calculation of the numerical value. Finally, two applied examples of the wire rope structure are introduced.

Key words: wire rope structure; finite analysis method; transfer matrix; gradual approach; computation software