

用 B 样条拟合计算带噪数字图像的梯度^{*}

逯峰, 杨朝霞, 关履泰

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘要: 利用 B 样条的局部性及其求导的特殊性, 对带有噪声的数字图像的梯度计算, 即: 首先利用 B 样条进行拟合, 然后求梯度。这样的处理就抑制了噪声的影响, 而且 B 样条的计算特别简单。还提出了算法实现的优化, 同时给出了实验结果。

关键词: B 样条; 数字图像; 噪声; 边缘

中图分类号: TP911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 02-0001-03

对数字图像而言, 边缘是图像中最重要的一类信息。现实生活中的图像基本都是带有噪声的, 如何在这些图像中提取边缘信息一直是一个热门的研究课题之一^[1,2]。比较常见的提取方法是先进行滤波, 然后再进行求梯度来确定边缘点。因为在求梯度的时候, 噪声会引起计算结果的较大误差, 经过滤波, 这种影响会大大降低。从 B 样条的数学性质可知, 通过 B 样条的磨光, 可以得到比较光滑的函数, 所以对带噪图像来说, 可以起到抑制噪声的作用, 另外, B 样条基函数的导数在相邻的次数上有特殊的关系, 这使得拟合函数求导的计算大大简化, 并且易在计算机上实现。另外, 在具体的计算机实现中, 利用数字图像的特点, 对算法进行了优化, 使得效率大大提高。

1 B 样条的磨光法及样条基的求导性质

对数字图像的边缘提取来说, 像素点的梯度的计算是一个关键的步骤。从函数逼近的角度来看, 通过函数的磨光可以使函数的光滑性得到提高, 运用到图像上, 通过这种拟合的方法就会降低噪声的影响, 并且得到一个连续变量的可导函数, 从而使函数求梯度变得更加简单和准确。从下述的分析可以看出, B 样条磨光是一个很好的选择。

1.1 B 样条磨光法

先看一维的情形^[3]: 设 $f(x) \in C^m(-\infty, +\infty)$, 称

$$\tilde{f}_{k+1}(x) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_k \left(\frac{x-t}{h} \right) f(t) dt \quad (1)$$

为 $f(x)$ 的 $k+1$ 次磨光函数, 其中:

$$\Omega_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i \binom{k+1}{i} \left[x + \frac{k+1}{2} - i \right]_+^k}{k!}$$

$k \geq 0$ 为非负整数

上式是 k 次 B 样条基函数的表示形式, 则 (1) 式称为磨光公式, h 称为磨光参数。磨光函数具有下列性质 (2)、(3):

$$\tilde{f}_{k+1}(x) = \frac{\overline{\Delta}_h^{k+1}}{h^{k+1}} f_{k+1}(x) \in C^{m+k+1}(-\infty, \infty) \quad (2)$$

其中, $f_{k+1}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 $k+1$ 次不定积分, 即:

$$f_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$\overline{\Delta}_h$ 表示步长为 h 的中心差分算子,

$$\overline{\Delta}_h f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$
$$\overline{\Delta}_h^{l+1} f(x) = \overline{\Delta}_h(\overline{\Delta}_h^l f(x))$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_{k+1}^{(l)}(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(l)}(x)|^2 dx \quad (3)$$

其中, $l = 0, 1, \dots, m$ 。从 (1)、(2)、(3) 式及其 B 样条基函数的性质可以看出:

- 1) 磨光函数可使原函数的光滑性得到提高;
- 2) 由于 B 样条具有紧支撑性质, 所以磨光过程具有局部作用的特点;
- 3) 磨光法具有保凸性, 即磨光函数能保持原函数的外型特点;
- 4) 磨光函数的表达形式简单, 容易在计算机上实现。

对于只给定离散型值点的磨光法的问题: 假定在节点 $\{x_i\}$ 上给定型值点 $\{y_i\}$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, 则依次连接型值点而得到的折线

* 收稿日期: 2001-06-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871095); 广东省自然科学基金资助项目 (9902275); 中山大学高等学术研究中心资助项目 (01M1)

作者简介: 逯峰 (1972-), 男, 博士研究生; Email: mcdec06@zsu.edu.cn

$$S_1(x) = \sum_{j=1}^N y_j \Omega_1\left(\frac{x-x_j}{h}\right), x \in [x_0, x_N]$$

其中,

$$\Omega_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| \geq 1 \\ 1-|x|, & \text{当 } |x| < 1 \end{cases}$$

对 $S_1(x)$ 经过 $k-1$ 次磨光, 可得 $k-1$ 次磨光函数

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^N y_j \Omega_k\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \tag{4}$$

其中, $\Omega_k(x)$ 的表达式见(1) 式, 有效磨光范围为

$$[x_0+(k-1)h, x_N-(k-1)h]。$$

在数字图像处理过程中, 可以先通过插值或拟合的方法把离散的情形变为连续的情形, 那么, 就可以利用连续函数的一些方法来处理问题了。其中, 磨光法就是一个非常好的拟合方法, 通过磨光法对带噪图像进行拟合, 既保持了图像原有的一些特点, 由于光滑程度的提高, 同时又抑制了噪声对处理图像时的影响。

设 $f(x, y)$ 代表带噪图像, $(x, y) \in D = \{1, M\} \times \{1, N\}$ 为一个离散集合, M, N 表示图像的大小, D 表示图像像素集合, 则对图像进行磨光可以表示为:

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j f(i, j) \Omega_k(x-i) \Omega_k(y-j) \tag{5}$$

1.2 B 样条基函数的求导性质

对 k 次 B 样条 $\Omega_k(x)$ 求导有如下性质^[1]:

$$\Omega'_k(x) = \Delta \Omega_{k-1}(x) = \Omega_{k-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Omega_{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

考虑图像这种二维情况: 对函数 $f(x, y)$ 来说, 对(5) 式关于 x 和 y 求偏导可得下式:

$$f_x(x, y) = \sum_i \sum_j f(i, j) \left[\Omega_{k-1}\left(x-i+\frac{1}{2}\right) - \Omega_{k-1}\left(x-i-\frac{1}{2}\right) \right] \Omega_k(y-j) \tag{7}$$

$$f_y(x, y) = \sum_i \sum_j f(i, j) \Omega_k(x-i) \cdot \left[\Omega_{k-1}\left(y-j+\frac{1}{2}\right) - \Omega_{k-1}\left(y-j-\frac{1}{2}\right) \right] \tag{8}$$

从 (6)、(7)、(8) 式可以看出, 图像梯度

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]$$

的计算, 只需知道不同次数的 B 样条在离散型值点上的函数值即可, 而不需要再按函数求导的一般法则进行, 这样就避免了烦琐的计算。在一般情况下, 选择 3 次 B 样条来处理图像问题。

2 B 样条拟合来计算带噪图像梯度的实现算法

用 3 次张量积 B 样条对大小为 $M \times N$ 的图像 $f(i, j), i=1, M; j=1, N$ 做拟合, 得到如下形式:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M f(i, j) \Omega_3(x-i) \Omega_3(y-j)$$

不妨先看 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ 的情形:

$$f_x(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M f(i, j) \left[\Omega_2\left(x-i+\frac{1}{2}\right) - \Omega_2\left(x-i-\frac{1}{2}\right) \right] \Omega_3(y-j)$$

利用 B 样条基函数的性质:

$$\text{supp } \Omega_2(x) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{supp } \Omega_3(x) = [-2, 2]$$

可得出 $f_x(x, y)$ 在整数点 $(m, n), (m = \overline{1, M}; n = \overline{1, N})$ 处的值为:

$$f_x(m, n) = \sum_{j=n-2}^{n+2} \left\{ \sum_{i=m-2}^{m+2} f(i, j) \left[\Omega_2\left(m-i+\frac{1}{2}\right) - \Omega_2\left(m-i-\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \Omega_3(n-j) \tag{9}$$

注意 (9) 式在边界处的特殊情况, 通过延拓的方法, 利用 (9) 式可构造矩阵形式:

$$F_x = (T_1 - T_2) \circ F \circ T_3 \tag{10}$$

其中,

$$F = [f(m, n)]_{M \times N},$$

$$F_x = [f_x(m, n)]_{M \times N}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{M \times M}$$

$$T_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

在 (10) 式中 F 表示带有噪声的原始图像, F_x 表示在每一点上的 x 方向的导数值所组成的矩阵。同理, 对 y 方向上的偏导数的计算也是类似的。

图像求梯度的问题是一个局部化的问题, 因为对每点都要进行特殊的计算, 在编程时不可避免地要用到大量的循环语句。但是, 通过 (10) 式, 可以把逐点计算转化为矩阵的计算, 以利用擅长矩阵计算的软件, 如 Matlab, Fortran 等, 可以简化程序

设计，提高计算的效率。

3 实验结果

图像梯度的计算主要用于图像边缘的提取，本文的实验采用 3 次 B 样条拟合后求梯度，然后用局部极大梯度的方法^[2]来判断边缘点，实验是在 Matlab 上实现的（图 1—3）。

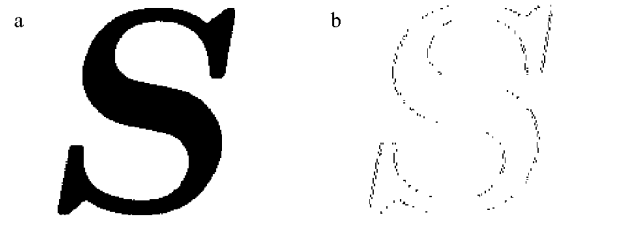


图 1 字母 S 的边缘检测结果

Fig 1 Edge detecting result of letter S

a 带噪图像字母 S，噪声为 Gaussian 白噪声，方差= 15；
b 边缘检测结果

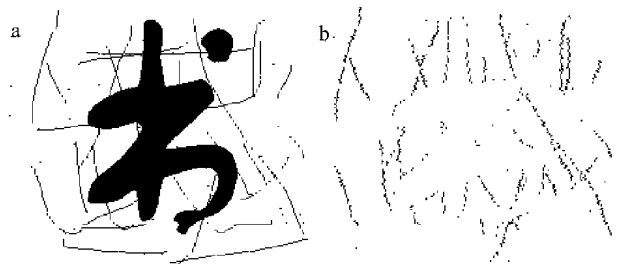


图 2 汉字的边缘检测结果

Fig 2 Edge detecting result of Chinese character

a 带噪图像汉字，噪声为 Gaussian 白噪声，方差= 20
b 边缘检测结果

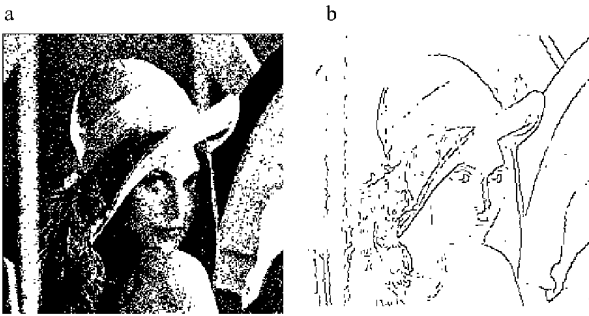


图 3 Lena 的边缘检测结果

Fig 3 Edge detecting result of Lena

a 带噪图像 Lena，噪声为 Gaussian 白噪声，方差= 15；
b 边缘检测结果

表 1 列出算法优化前后的计算时间对比。

表 1 两种算法的计算时间¹⁾

算法	Time consumed by two algorithms			s
	字母 S 256× 256	汉字 256× 256	Lena 256× 256	
循环算法	379	429	480	
优化算法	17	23	26	

1) 本实验是在赛扬 400，128 M 内存的微机上用 Matlab 软件实现的。

参考文献:

[1] TANG Y Y, YANG L H. Wavelets theory and its application to pattern recognition[M] . Singapore: World Scientific Press, 2000; 179— 220.
[2] 吴立德. 计算机视觉[M] . 上海: 复旦大学出版社, 1993; 12— 116.
[3] 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法[M] . 北京: 科学出版社, 1978; 25— 57.

Gradient Computation of Noisy Digital Image by B-spline Fitting

LU Feng, YANG Zhao xia, GUAN Lu tai

(Department of Scientific Computation and Computer Applications,
Sun Yat sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A new approach, which uses the local and derivative properties of B-spline to compute the gradient of noisy digital image, is presented. The noisy image is fitted by B-spline before computing the gradient. After the processing, the noise will be reduced. Furthur more, the representation of B-splines is very simple. An improved algorithm is also given with some experimental results.

Key words: B-spline; digital image; noise; edge