

图像梯度与散度计算及在边缘提取中的应用^{*}

杨朝霞, 逯峰, 李岳生

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 尝试把梯度和散度的概念引入到图像分析中, 基于梯度和散度的积分定义, 给出了计算图像梯度散度的、与坐标选取无关的简易近似公式。并将它们应用到带噪数字图像中, 利用梯度与散度的配合进行边缘提取, 同时给出了实验结果。

关键词: 梯度; 散度; 带噪图像; 边缘; 阈值

中图分类号: TP911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 06-0006-04

在图像处理领域中, 最初是通过不同的方向的差分来近似代替不同的方向的偏导数, 从而计算出梯度向量^[1]。其计算误差比较大, 对大多图像来说不适用。Mallat 等^[2]提出了利用小波卷积核计算图像梯度的方法, 通过求小波核函数的导数达到求函数梯度的目的, 这种计算相对稳定。最早的一些边缘检测方法都是基于图像像素处的梯度进行判定的, 例如 Robert 算子、Sobel 算子和 Haralick 的离散正交多项式方法等。由于实际图像的复杂性, 边缘检测的效果一般都不理想。文[3]利用在边缘像素处, 沿梯度方向像素梯度模为局部极大的性质进行处理, 增加了图像梯度阈值选取的灵活性。这种方法和小波结合起来收到了良好的效果, 但是在实际应用中, 对某些边缘, 如 δ 边的检测效果不理想。

从以上分析可以看出, 如何得到一种稳定、简单和准确的计算方法, 并将之用到图像分析领域是非常有意义的。本文从梯度的积分原始定义出发, 构造出适合图像计算的离散格式, 并对之进行简化。同时仿照流体力学的概念, 引入了图像散度的计算。由于是积分运算, 因而在有扰动的情況下具有一定的稳定性和准确性, 并且与坐标选取无关, 这在三维情况下的计算有非常重要的意义。

1 图像梯度与散度的计算

1.1 梯度、散度的数学定义

对一个标量场 $T(x, y, z)$, 以三维直角坐标系为例, 在点 (x, y, z) 处的梯度定义为:

$$\text{Grad} T(x, y, z) = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

对一个向量场 $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$, 在点 (x, y, z) 处的散度定义为:

$$\text{Div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

通过奥—高公式可以构造出统一的计算表达式:

$$\nabla F|_{P_0=(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{V \rightarrow 0} \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot F d\sigma \quad (1)$$

在 (1) 式中, V 为单连通积分区域 (图 1(a)); ∂V 为 V 的边界, $\mathbf{n}$ 为边界上的外向法矢, $d\sigma$ 为面积元。

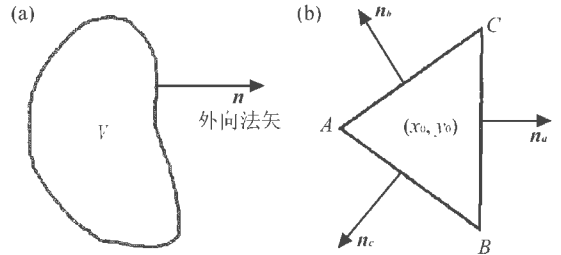


图 1 单连通积分区域 (a) 和 $\partial V(x_0, y_0)$ 点 (x_0, y_0) 处的三角形邻域 (b)

Fig 1 Simply connected integral domain (a) and triangular neighborhood point (x_0, y_0) (b)

上式中的积分计算公式分 2 种形式:

(1) 当 F 为标量场:

$$\nabla F = \text{Grad} F, \quad \mathbf{n} \cdot F = nF$$

(2) 当 F 为向量场:

$$\nabla F = \text{Div} F, \quad \mathbf{n} \cdot F = (\mathbf{n}, F)$$

其中, $(\cdot, \cdot)$ 表示内积算子。

* 收稿日期: 2002-03-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871095)

作者简介: 杨朝霞 (1975 年生), 女, 博士, 讲师; E-mail: lndcca03@zsu.edu.cn

1.2 梯度、散度的数值计算

数字图像是由二维离散的像素点构成，如何利用在这些离散点上的灰度值来构造 (1) 式的二维离散形式的计算格式是非常重要的。对某一点 (x_0, y_0) 的梯度、散度的数值计算，一般在该点附近选择一个小邻域(图 1(b))，为简化计算，可选为包含该点的三角形或矩形邻域。在该邻域上按 (1) 式进行计算。

下面以三角形邻域为例进行分析：

(1) 梯度的计算。

设 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ ，选取包含 (x_0, y_0) 的三角形 $\triangle ABC$ (图 1(b))， $\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c$ 分别表示三角形的外向法矢。

据 (1) 式，可得梯度的近似计算公式：

$$\nabla f(x, y) \big|_{(x_0, y_0)} \approx \frac{1}{S_{\triangle ABC}} \oint_L \mathbf{n} \circ f ds \quad (2)$$

其中， $S_{\triangle ABC}$ 表示三角形的面积， $L: AB \cup BC \cup CA$ 。

由积分的性质，(2) 式右端的积分可以分成在三角形的 3 条边上的积分的和，在每一边的积分用梯形公式来计算：

$$\int_{AB} \mathbf{n} \circ f ds \approx \mathbf{n}_c \circ \frac{1}{2} [f(x_a, y_a) + f(x_b, y_b)] \circ |AB| \quad (3)$$

$$\int_{BC} \mathbf{n} \circ f ds \approx \mathbf{n}_a \circ \frac{1}{2} [f(x_b, y_b) + f(x_c, y_c)] \circ |BC| \quad (4)$$

$$\int_{CA} \mathbf{n} \circ f ds \approx \mathbf{n}_b \circ \frac{1}{2} [f(x_c, y_c) + f(x_a, y_a)] \circ |CA| \quad (5)$$

(3)+(4)+(5) 可得(2) 式的近似表达，并且对一次函数精确。其整理后的表达式是 $f(x_a, y_a), f(x_b, y_b), f(x_c, y_c)$ 的线性组合，其中， $f(x_c, y_c)$ 的系数为：

$$\frac{(1/2) \circ \mathbf{n}_a \circ |BC| + (1/2) \circ \mathbf{n}_b \circ |CA|}{S_{\triangle ABC}} \quad (6)$$

利用三角形的性质：

$$\mathbf{n}_a \circ |BC| + \mathbf{n}_b \circ |CA| + \mathbf{n}_c \circ |AB| = 0 \quad (7)$$

(6) 式又可写作：

$$\begin{aligned} & - \frac{(1/2) \circ \mathbf{n}_c \circ |AB|}{S_{\triangle ABC}} = \\ & - \frac{(1/2) \circ \mathbf{n}_c \circ |AB|}{(1/2) \circ h_c \circ |AB|} = - \frac{\mathbf{n}_c}{h_c} \end{aligned} \quad (8)$$

其中， h_c 表示三角形顶点 C 所对应边上的高的长

度。

计算 $f(x_a, y_a), f(x_b, y_b)$ 的系数类似，最后得梯度的近似表达式：

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) \big|_{(x_0, y_0)} \approx & f(x_a, y_a) \circ \frac{\mathbf{n}_a}{h_a} - \\ & f(x_b, y_b) \circ \frac{\mathbf{n}_b}{h_b} - f(x_c, y_c) \circ \frac{\mathbf{n}_c}{h_c} \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 散度的计算。

设有一向量场

$$\mathbf{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

由 (1) 式可得散度的近似计算公式：

$$\text{Div} \mathbf{g}(x, y) \big|_{(x_0, y_0)} \approx \frac{1}{S_{\triangle ABC}} \oint_L \mathbf{n} \circ \mathbf{g} ds \quad (10)$$

其中， $S_{\triangle ABC}$ 表示三角形的面积， $L: AB \cup BC \cup CA$ 。

(10) 式右端的积分计算按三角形的 3 条边分为 3 段：

在 AB 段：

$$\begin{aligned} & \int_{AB} \mathbf{n} \circ \mathbf{g} ds \approx \\ & n_{1c} \left[\frac{1}{2} \circ (g_1(x_a, y_a) + g_1(x_b, y_b)) \circ |AB| \right] + \\ & n_{2c} \left[\frac{1}{2} \circ (g_2(x_a, y_a) + g_2(x_b, y_b)) \circ |AB| \right] \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{n}_c = (n_{1c}, n_{2c})$ 。

同理可计算在 CA 段和 BC 段的情形。类似于(1) 中梯度的计算，据(8) 式可得散度的计算表达式：

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{g}(x, y) \big|_{(x_0, y_0)} \approx & - \frac{1}{h_a} [n_{1a} \circ g_1(x_a, y_a) + n_{2a} \circ g_2(x_a, y_a)] - \\ & \frac{1}{h_b} [n_{1b} \circ g_1(x_b, y_b) + n_{2b} \circ g_2(x_b, y_b)] - \\ & \frac{1}{h_c} [n_{1c} \circ g_1(x_c, y_c) + n_{2c} \circ g_2(x_c, y_c)] \end{aligned} \quad (11)$$

从(9) 和(11) 式可以看出，通过包含某点的三角形 3 个顶点的坐标，就可以近似地计算出该点的梯度和散度。从本质上看，这种计算与坐标系的选择无关。对于数字图像来说，计算某个像素位置的梯度和梯度向量场的散度，只要选择包含该像素的小三角形邻域，该三角形的顶点是由邻近像素组成的，利用这些像素的灰度值，就可计算出在所求像素位置的梯度和散度。这种计算非常简单，并且容易在计算机上实现。

2 带噪图像的边缘提取

在数字图像中，一般最主要的边缘有 2 种： δ 边和 Staircase 边。对于数字图像的边缘检测，一般是构造边缘检测算子计算出与梯度有关的某个量，

然后设定阈值来确定边缘。但对带有噪声的图像来说, 由于噪声对图像梯度计算的影响, 使得对带噪图像边缘提取有一定的困难, 往往会检测出假边缘或边缘检测结果有一事实上的变形或误差。在图像边缘检测中, 往往仅仅通过梯度或与梯度有关的某些量来进行判定。实际上图像梯度和散度都反映了灰度的变化, 这 2 个量在图像的边缘处比较大, 而在图像的平坦部分接近于零。对带噪图像的边缘判定时, 由于噪声的影响, 使得仅利用梯度阈值和局部极大法则会检验出噪声点为边缘点, 影响到检验效果^[2-4]。本文在梯度阈值的基础上, 再利用图像梯度场的散度量对检测出的边缘结果进行进一步判定, 也可以得到准确并有较好视觉效果的结果, 并且改善了对 δ 边的检测效果。处理步骤如下:

(1) 为减弱噪声对计算的影响, 对一幅带有噪声的图像 $f(x, y)$ 进行滤波, 得到比原始图像光滑的图像 $f(x, y)$;

(2) 对任意像素 $(x_0, y_0) \in f(x, y)$, 通过构造包含 (x_0, y_0) 的三角形区域或矩形区域, 利用 (9) 和 (11) 式计算在该点的梯度 $G(x_0, y_0)$ 和散度 $D(x_0, y_0)$;

(3) 如果 $G(x_0, y_0) \geq T_1$ 且 $D(x_0, y_0) \geq T_2$, 则可判定 (x_0, y_0) 为边缘点, 反之, (x_0, y_0) 为非边缘点。其中, T_1 为给定的梯度的阈值, T_2 为给定的散度的阈值。

3 实验结果

分别以带有噪声的 2 幅图像 Circles.bmp 和 Shu.bmp 为例进行实验, 实验结果如图 2, 3。其中噪声为 Gaussian 白噪声, 噪声方差为: $\sigma^2=12$ 。

4 小 结

从上面的实验可以看出, 用梯度和散度的配合可以有效地进行带噪图像的边缘检测, 并且这种方法对各种类型边缘均有效。再者, 利用本文所提出的算法进行图像梯度和散度的计算是非常方便的。如何进一步提高计算数字图像梯度的精度, 和如何把梯度、散度甚至旋度等这些在流体力学等领域中有广泛应用的物理量应用到图像处理领域, 并且能论证出这些量对应图像的哪些属性, 是值得进一步深入研究的。

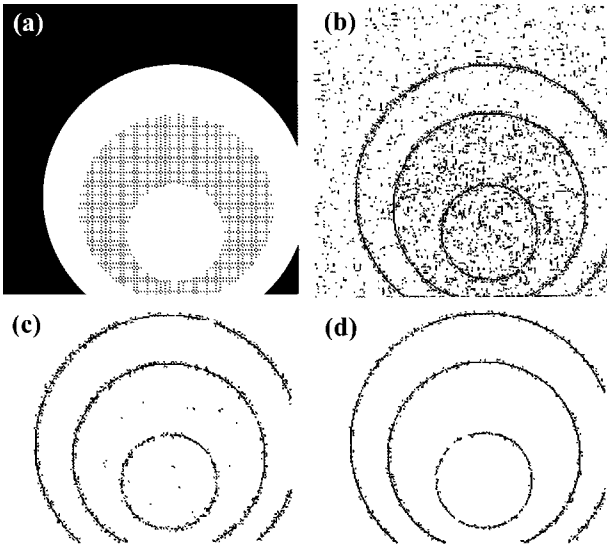


图 2 (a) 带噪图像 Circles.bmp
(b) 利用梯度方向模局部极大方法检测边缘结果^[2], $T_1=20$;

(c) 配合散度的实验结果 1, $T_1=20, T_2=40$;
(d) 配合散度的实验结果 2, $T_1=20, T_2=50$

Fig 2 (a) A noise image Circles.bmp

(b) Edge detecting with the method of local maximum through gradient direction, where $T_1=20$;
(c) Adding the divergence, where $T_1=20, T_2=40$;
(d) Adding the divergence, where $T_1=20, T_2=50$

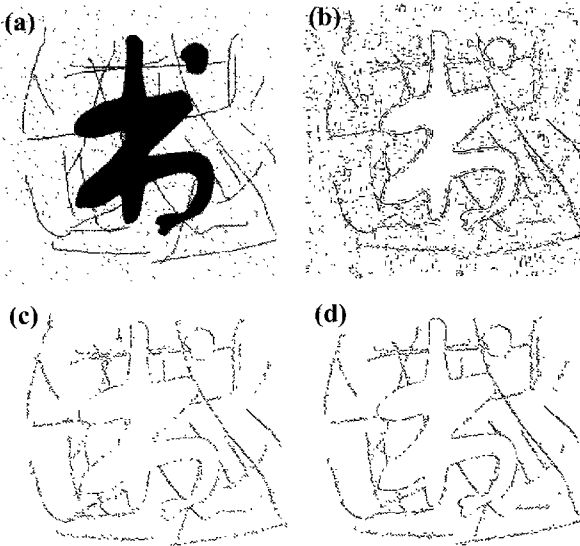


图 3 (a) 带噪图像 Shu.bmp;
(b) 利用梯度方向模局部极大方法判定^[2], $T_1=25$;
(c) 配合散度的实验结果 1, $T_1=25, T_2=40$;
(d) 配合散度的实验结果 2, $T_1=45, T_2=60$

Fig 3 (a) A noise image Shu.bmp

(b) Edge detecting with the method of local maximum through gradient direction, where $T_1=25$;
(c) Adding the divergence, where $T_1=25, T_2=40$;
(d) Adding the divergence, where $T_1=45, T_2=60$

参考文献:

[1] 吴立德. 计算机视觉[M] . 上海: 复旦大学出版社, 1993: 12— 20.

[2] MALLAT S, HUANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J] . IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38: 617— 643.

[3] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M. Wavelets theory and its application to pattern recognition[M] . Singapore: World Scientific Press, 2000: 179— 220.

[4] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M. Characterization of dirac-structure edges with wavelet transform[J] . IEEE Trans Sys Man Cyb, 2000, 30(B) : 93— 109.

Computation of Image Gradient and Divergence and Their Application to Edge Detection of Noisy Images

YANG Zhao xia, LU Feng, LI Yue sheng

(Department of Scientific Computation and Computer Application,
Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Gradient and divergence are introduced into image analysis. Based on the integral definition of gradient and divergence, an easier approximate discrete expression of them is presented, which is independent of the coordinate. Furthermore, the gradient and divergence are applied to edge detection of noisy images. Corresponding experiments are also given.

Key words: gradient; divergence; noisy image; edge; threshold

(上接第 5 页)

The Symmetric Groups of a Class of Nonlinear Hill's Equations

AI Jun

(Department of Mathematics, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A class of nonlinear Hill's equations which arises from the study of the generalized curve shortening problem is discussed. A result that the solution set of the equation admitting a three dimensional Lie algebra of infinitesimal symmetries is obtained. The basis of this algebra is also given in the following form

$$\left\{ 2\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i'(x)u\frac{\partial}{\partial u}, i = 0, 1, 2 \right\}$$

Key words: differential equations; symmetric groups; Lie algebra