

一类随机环境中的非紧邻的随机游动^{*}

柳向东

(中山大学数学系, 广东 广州510275)

摘要: 对一类随机环境中的非紧邻的随机游动 (包含了紧邻情形) 进行了讨论, 并得出了一个可操作的常返性准则和平均回访时间的表达式。

关键词: 随机环境; 随机游动; 马氏链; 常返性; 首中时

中图分类号: O211.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 01-0097-03

随机环境中的一维紧邻的随机游动由 Solomon 等^[1-3]得到了比较透彻的研究, 但对于非紧邻的情形和高维情形却研究甚少, 所得的深刻的结果比较少, 还有许多的问题留待研究, 其中 Key^[4]是目前做非紧邻的情形工作中最好的一位, 对非紧邻的情形得出了下面的结果:

对于随机环境中的随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 假定 $E[\log(e(0; -L))] > -\infty, E[\log(e(0; R))] > -\infty$. 令 $\{d_i\}_{1 \leq i \leq R+L}$ 是 $R+L$ 个递增的、随机矩阵列 $\{A_{-y}\}_{y \in \mathbb{Z}_+}$ 的 Lyapunov 数。则:

若 $d_R + d_{R+1} > 0$, 则 $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty\} = 1$;

若 $d_R + d_{R+1} = 0$, 则 $P\{-\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty\} = 1$;

若 $d_R + d_{R+1} < 0$, 则 $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty\} = 1$;

虽然这个结果近乎完美, 但在一般情形下要直接运用它去计算 $d_R + d_{R+1}$ 却几乎是不行的, 原因是随机矩阵的 Lyapunov 数不容易求出。

本文就一类比较特殊的非紧邻的模型得出了一个可操作的常返性判断准则。这个过程用环境来控制方向, 向左和向右的选择由一组随机变量来控制, 在本文中只讨论比较简单的情形, 如果选择向左的方向, 只跳 1 步, 如果选择向右, 则可跳 1 步或 2 步, 具体的模型如下。

定义 1 $\alpha_n, n \in \mathbb{Z}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一列独立同分布的随机变量, 定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 $\{X_n, n \geq 0\}$:

$$P(X_0 = 0) = 1$$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = 0, X_1 =$$

$$i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, \alpha_n) = \begin{cases} \theta \alpha_i, & j = i + 2 \\ (1 - \theta) \alpha_i, & j = i + 1 \\ \beta_i, & j = i - 1 \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases}$$

其中, $i_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n-1, 0 \leq \alpha_i < 1, \alpha_i + \beta_i = 1, 0 \leq \theta \leq 1$ 为一常数。称上述的 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一类随机环境中的非紧邻的随机游动 (简记为 RWIRE), 并称随机变量列 $\{\alpha_n, \beta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为随机环境。为了方便记 $\alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta, \theta \alpha_i = e(i; 2), (1 - \theta) \alpha_i = e(i; 1), \beta_i = e(i; -1)$ 。

注 1 上述的环境独立性, 也可用 $e(i; *)$ 独立来表示。同文 [4] 可证这种 RWIRE 是存在的。

定理 1 对于上述的 RWIRE $\{X_n, n \geq 0\}$, 令

$\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$ 则有:

若 $E\left[\log\left(\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\theta\sigma}}{2}\right)\right] > 0$,

则 $X_n \rightarrow +\infty$ a. s. [P],

若 $E\left[\log\left(\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\theta\sigma}}{2}\right)\right] = 0$,

则 $-\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ a. s. [P],

若 $E\left[\log\left(\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\theta\sigma}}{2}\right)\right] < 0$,

则 $X_n \rightarrow -\infty$ a. s. [P]。

证明 当 $\theta > 0$, 上述的 RWIRE 中, 随机矩阵

* 收稿日期: 2001-09-01;

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19361060); 广东自然科学基金资助项目 (980287)

作者简介: 柳向东 (1973—), 男, 博士生; E-mail: lxld26@mail@263.net

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\theta\sigma & -(1-\theta)\sigma & 1/\beta \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$C(X) = (X-1)(X^2 - \sigma X - \theta\sigma) = (X-1)M(X)$$

注意到 $M(0) < 0$, $M(-1) > 0$, M 必有一根 $\alpha \in (-1, 0)$, 则 $d_1 = E \log \alpha < 0$, 而又根据文 [4] 引理 24 可知 d_2, d_3 至少有 1 个为 0, 注意到 Lyapunov 数是矩阵特征值的绝对值的对数的推广, 则 $d_2 + d_3 = E \left[\log \left[\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\theta\sigma}}{2} \right] \right]$, 再运用 Key 引理 A^[4] 就可以得出定理 1.

注 2 当 $\theta = 0$ 时, 就可以得出 Solomon^[1] 所做的结果.

下面计算 $RWIRE\{X_n, n \geq 0\}$ 从 0 到 -1 的平均回访时间. 令

$$T_{-n} = \inf\{k > 0; X_k = -n\}$$

$$m(i) = -(2\theta\alpha_i + (1-\theta)\alpha_i - \beta_i)$$

定理 2 若 $E(1/\beta) < \infty$ 和 $E(m(0)/\beta) > 0$, 则 $E\{T_{-1}\} < \infty$, 且 $E\{T_{-1}\} = [E(m(0)/\beta)]^{-1}$.

为了证明定理 2, 先考虑 $\beta < 1$ a.s. 令 $X^\Gamma(n)$ 是 $\{X_n, n \geq 0\}$ 在 -1 点的反射后的过程. 固定环境 e , $X^\Gamma(n)$ 有转移函数 $p^e(x, y)$, 满足以下的条件:

$$p^e(x, y) = e(x, a), x \geq 0 \text{ 和 } -1 \leq a \leq 2, p^e(-1, 0) = 1,$$

$$p^e(x, y) = 0, \text{ 其它情形.}$$

显然, 要求出 T_{-1} , 只要考虑 $X^\Gamma(n)$.

引理 1 固定环境, 若 $E\{T_{-1} | e\} < \infty$, 则方程组

$$v(-1) = 1 \quad (1)$$

$$v(y) = \sum_{x \geq -1} v(x) p^e(x, y), y \geq -1 \quad (2)$$

有唯一的非负解 $v(\cdot)$, 且

$$\sum_{y \geq -1} v(y) < \infty$$

$$\text{且 } E\{T_{-1} | e\} = \sum_{y \geq 0} v(y).$$

证明 考虑到固定的环境, $X^\Gamma(t)$ 是马氏链, 再参看 Breiman (1968), p143-145 即可.

定义一个随机变量 $h(n)$, $n \in \mathbf{Z}$ 如下:

$$h(0) = 1, h(a) = 0, a \leq -1$$

$$h(n+1) = \sum_{r=0}^1 h(n-r) \sum_{p=r+1}^2 \frac{e(n-r; p)}{e(n-r; -1)},$$

$$n \geq 0$$

对 $n \geq 0$, 令 $\mathcal{F}_n \equiv \sigma\{e(0, \cdot), \dots, e(n, \cdot)\}$.

用数学归纳法可得以下引理 2.

引理 2 对 $n \geq 0$, $h(n+1) \in \mathcal{F}_n$.

引理 3 对 $n \geq 0$, 有

$$E\{h(n+1)\} = \sum_{r=0}^1 E\{h(n-r)\} \sum_{p=r+1}^2 E\left\{\frac{e(0; p)}{e(0; -1)}\right\}$$

证明 两边取数学期望, 再运用引理 2, 和 $e(z, \cdot)$ 是 iid 即证.

引理 4 若 $E(m(0)/e(0; -1)) > 0$, 则

$$\sum_{n \geq 0} E\{h(n)\} < \infty, \text{ 且}$$

$$\sum_{n \geq 0} E\{h(n)\} = \left[E\left\{\frac{m(0)}{e(0; -1)}\right\} \right]^{-1}$$

证明 运用引理 3 有

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} E\{h(n)\} &= 1 + \sum_{n \geq 0} E\{h(n+1)\} = \\ &= 1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{r=0}^1 E\{h(n+r)\} \sum_{p=r+1}^2 E\left\{\frac{e(0; p)}{e(0; -1)}\right\} = \\ &= 1 + \sum_{n \geq 0} E\{h(n)\} \sum_{r=0}^1 \sum_{p=r+1}^2 E\left\{\frac{e(0; p)}{e(0; -1)}\right\} \end{aligned}$$

则有

$$E\left\{\frac{m(0)}{e(0; -1)}\right\} \sum_{n \geq 0} E\{h(n)\} = 1$$

即得结论.

引理 5 假定 $e(0; -1) > 0$ a.s., 则 $h(n)$ 是下列线性方程组的非负根

$$f(a) = 0, a \leq -1;$$

$$f(-1) = \sum_{a=1}^2 \frac{e(0; a)}{e(0; -1)};$$

$$f(0) = 1;$$

$$f(n+1) - f(n) = f(n) \sum_{a=1}^2 \frac{e(n; a)}{e(n; -1)} -$$

$$\sum_{a=1}^2 f(n+a) \frac{e(n+a; a)}{e(n+a; -1)}, n \geq 1.$$

证明 把非负 $h(n)$ 代入验证即可.

引理 6 对 $n \geq 0$, 令 $v(n) = h(n)/e(n; -1)$, $v(-1) = 1$, 则 $v(\cdot)$ 是满足方程组 (1) 和 (2) 的非负根, 且如果

$$E\left\{\frac{m(0)}{e(0; -1)}\right\} > 0, E\{1/e(0; -1)\} < \infty$$

则

$$\sum_{n \geq 0} E\{v(n)\} = E\left\{\frac{1}{e(0; -1)}\right\} \left[E\left\{\frac{m(0)}{e(0; -1)}\right\} \right]^{-1}$$

证明 通过定义, 可知 $v(\cdot)$ 满足式 (1), 通过直接计算可知当 $y=0$ 和 $y=-1$ 时, $v(y)$ 满足式 (2).

现假定 $y \geq 1$, 定义 $u(y) \equiv h(y)/e(y; -1)$.

注意到当 $y \geq 0$ 时, $u(y) = v(y)$, 对于 $y \geq 1$ 由引理 5 可知:

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y) = \sum_{a=-1}^2 u(y+a) e(y+a; -a) = \\ &= \sum_{x \geq 0} u(x) e(x; y-x) = \\ &= \sum_{x \geq 0} v(x) p^e(x, y) = \\ &= \sum_{x \geq 1} v(x) p^e(x, y) \end{aligned}$$

最后 1 个式子由于 $P^e(-1, y) = 0, y \geq 1$. 因此, $v(\cdot)$ 满足式 (2)。由引理 2 可知 $E\{v(n)\} = E\{h(n)\} E\{1/e(0; -1)\}$, 再由引理 4 可得到结论。

定理 2 证明 在 $e(0; -1) < 1$ a. s. 情形时, 由引理 1, 引理 6, 可知定理成立。在 $e(0; -1) = 1$ a. s. 情形时, 定理显然成立。证毕。

在 $E\{T_{-1}\} < \infty$ 时, 随机变量序列 $T_{-n-1} - T_{-n}$, $n \geq 0$ 是平稳遍历的, 则有下列的推论。

推论 1 如果 $E\{1/e(0; 1)\} < \infty$, 且

$$E\left\{\frac{m(0)}{e(0; 1)} > 0\right\}, \text{ 则}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{-n}}{n} = E\left\{\frac{1}{e(0; -1)}\right\} \left[E\left\{\frac{m(0)}{e(0; -1)}\right\}\right]^{-1} \text{ a. s.}$$

证明 运用 Birkhoff 遍历定理即可。

注 3 当 $\theta = 0$ 时, 就可以得出 Solomon^[1] 在 1975 年所做的部分结果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{-n}}{n} = \frac{1 + E(\sigma^{-1})}{1 - E(\sigma^{-1})}$ a. s., 同时也可推广为往前跳步长 $L \geq 2$ 的情形。

致谢 衷心感谢导师戴永隆教授的悉心指导。

参考文献:

- [1] SOLOMON F. Random walk in a random environment[J]. Ann Prob, 1975(3): 1-31.
- [2] SINAI Y. The behavior of a one-dimensional random walk in a random medium[J]. Theo Prob Appl, 1982, 27: 256-268.
- [3] KESTEN H, KOZLOV M, SPITZER F. A limit law for random walk in a random environment[J]. Comp Math, 1975, 30: 145-168.
- [4] KEY E S. Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment[J]. Ann Prob, 1984, 12: 529-560.

A Class of Non-nearest neighbor Random Walks in Random Environments

LIU Xiang dong

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen (Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: This paper describes and analyzes a class of non nearest neighbor random walks in random environments which contain nearest neighbor situation (given by Solomon) as a special case and have an exercisable recurrence transience criterion. Furthermore, an explicit expression of the hitting time is presented

Key words: non nearest neighbor random walks; random environments; of recurrence; transience; hitting time