

夹层梁脱层问题能量释放率的计算*

刘祚秋¹, 肖成锋², 刘耀鹏²

(1. 中山大学地球科学系, 广东 广州 510275;
2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 在夹层梁脱层分析所得到的附加状态的多项式解的基础上, 提出了计算夹层梁脱层问题的能量释放率的一种简便方法, 为此类问题的断裂力学分析提供了一种有力的工具。

关键词: 夹层梁; 脱层; 附加状态; 能量释放率

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 05-0102-03

夹层梁中最常见的损伤形式是脱层, 特别是层间界面裂缝。脱层扩展的理论研究主要是采用断裂力学方法处理脱层尖端的奇异性, 已有的脱层裂缝的扩展是由应力强度因子或能量释放率的大小支配的, 因此能量释放率的计算是脱层问题断裂力学分析的基础, 然而用通常的数值方法直接去计算脱层问题的能量释放率将是十分困难而复杂的^[1]。本文利用状态分解^[2], 将真实状态的能量释放率的计算转化为对附加状态多项式解的微分运算, 大大简化了分析的难度, 为能量释放率的计算提供了 1 条方便的途径。

1 能量释放率的计算

由文 [2] 的分析, 脱胶问题的真实状态(图 1(a))可分解为不含脱胶的基本状态(图 1(b))和附加状态(图 1(c))的叠加。基本状态的解答可用通常的方法得到, 而附加状态的多项式解答已经在文 [3] 中给出。

将真实状态、基本状态和附加状态的应力、应变和挠度分别记为 $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, \bar{w}, \sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, w^0$ 和 $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, w$, 其中应力分量和应变分量的下标 i, j 取值应为 1 或 3, 分别对应于 x 轴和 z 轴, 且 $\sigma_{33} = \sigma_z = 0, \epsilon_{33} = \epsilon_z = 0$ 。由叠加原理, 有

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}, \bar{w} = w^0 + w \quad (1)$$

真实状态的系统总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \int_{-t_c}^{t_c+t_f} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dz dL - \int_L q(x) \bar{w} dL \quad (2)$$

其中, L 是整个梁长。

注意到附加状态所受的外力是一对大小相等、方向相反的剪应力, 因而是零力系, 它们对于基本

状态的位移所做的功显然是零, 再利用功的互等定

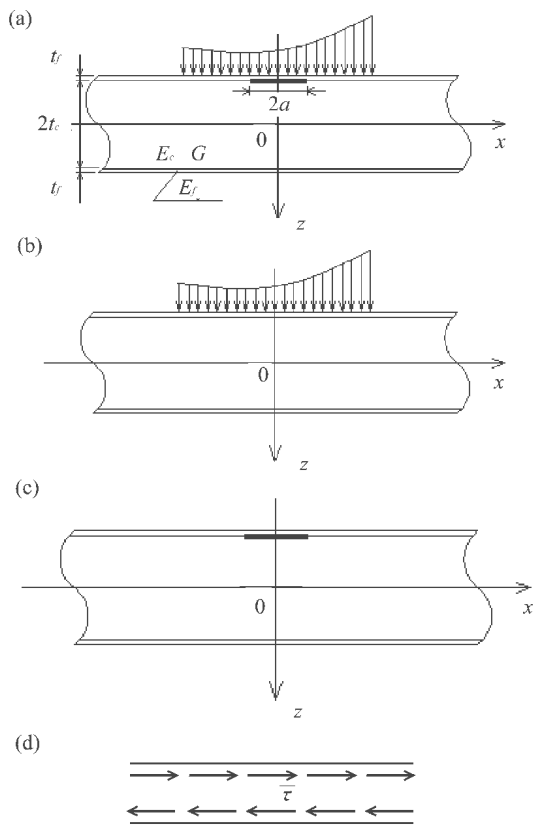


图 1 状态分解示意图

Fig. 1 The schematic diagram of state decomposition

- (a) 夹层梁脱胶真实状态;
- (b) 不含脱胶的基本状态;
- (c) 含脱胶的附加状态;
- (d) 分层面

理, 可知附加状态的应力对于基本状态的应变所做的功以及基本状态的应力对于附加状态的应变所做

* 收稿日期: 2002-01-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19902022)

作者简介: 刘祚秋 (1965 年生) 男, 讲师; E-mail: liuzuoqiu@263.net

的功均为零，即：

$$\int_L \int_{-t_c-t_f}^{t_c+t_f} \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dz dL = \int_L \int_{-t_c-t_f}^{t_c+t_f} \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dz dL = 0 \quad (3)$$

利用式 (1) 和 (2)，真实状态的总势能可简化为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \int_{-t_c-t_f}^{t_c+t_f} (\sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 + \sigma_{ij} \epsilon_{ij}) dz dL - \int_L q(w^0 + w) dL \quad (4)$$

现在不妨假设脱层段向右有长度为 da 的扩展，则由此引起的能量释放率可表达为

$$\Pi_A^* = - \frac{d\Pi}{da} \quad (5)$$

由于基本状态不含脱胶，故相关的量与脱层长度的变化无关即它们对 a 的导数应是零，于是上式的能量释放率可简化为

$$\Pi_A^* = - \frac{d}{da} \int_L (W - q(x)w) dL, \quad W = \int_{-t_c-t_f}^{t_c+t_f} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dz \quad (6)$$

式中的 W 是附加状态的应变能密度，而 σ_{ij} ， ϵ_{ij} ， w 的解答（显然是 a 的函数）利用文[3]给出的方法可用多项式求出。从形式上脱层问题的能量释放率仅与附加状态有关，但附加状态中的那一对已知剪应力却是由基本状态确定的，因此能量释放率是由基本状态和附加状态共同决定的。

2 附加状态应变能密度的简化计算

如图 1 (a) 所示夹层梁，其蒙皮相对于芯层对称铺设。蒙皮为各向同性材料，其杨氏模量为 E_f ，泊松比为 ν_f ，厚度为 t_f ；芯层为正交各向异性材料，正交向杨氏模量分别为 E_{cx} ， E_{cy} ，泊松比分别为 ν_{cxy} ， ν_{cyx} ，横向剪切模量分别为 G_{cy} ， G_{yx} ，芯层厚度为 $2t_c$ 。下面对附加状态的应变能密度 W 加以分析。首先对于未脱胶段，由文[3] 未脱层段的位移解答可得：

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 2E_c^* t_c^5 \zeta \left[\frac{\beta'}{3(1+\zeta)} - \frac{t_c \gamma'}{15(1+\zeta/3)} \right]^2 \\ W_3 &= 2E_c^* t_c^5 \zeta \left[\frac{\beta'}{3(1+\zeta)} + \frac{t_c \gamma'}{15(1+\zeta/3)} \right]^2 \\ W_2 &= E_c^* t_c^3 \zeta^2 \left[\frac{24+8\zeta+4\zeta^2}{45(1+\zeta)^2} + E_c^* t_c^7 \gamma'^2 \right] \\ &\quad + \frac{8-32\zeta+4\zeta^2/15}{105(1+\zeta/3)^2} + 4G_c^* t_c^3 \left[\frac{\beta^2}{3} + \frac{t_c^2 \gamma'^2}{5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中， $E_f^* = \frac{E_f}{1-\nu_f^2}$ ， $E_c^* = \frac{E_{cx}}{1-\nu_{cxy}\nu_{cyx}}$ ， $G_c = G_{cy}$ ，

$\zeta = \frac{E_c t_c}{E_f t_f}$ ，下标 1, 2, 3 分别表示上蒙皮、芯层和下蒙皮的应力、应变分量及应变能密度。由于参数 ζ 远小

于 1，因此在未脱胶段的上下蒙皮的应变能相对于芯层而言是可以忽略的。

对于脱胶段，利用文[3] 的脱层段的位移解答，可得

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{\zeta}{E_c^* t_c} \left[\int \tau(x) dx \right]^2 \\ W_3 &= E_c^* t_c^5 \zeta \left[u'_0 + \frac{\alpha' t_c}{3} + \frac{\gamma' t_c^2}{3} + \frac{\gamma' t - 3c}{5} \right]^2 \\ W_2 &= E_c^* \int_0^{t_c} [(z^2 \beta' + u'_0)^2 + (z \alpha' + z^3 \gamma')^2] dz + \\ &\quad 4G_c^* t_c^3 \left[\frac{\beta^2}{3} + \frac{t_c^2 \gamma'^2}{5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因此，脱胶段上下蒙皮的应变能相对于芯层而言也是可以忽略的。

这样，在计算附加状态的应变能时，只须考虑芯层的应变能，而上下蒙皮的应变能可忽略。然而值得注意的是，对于不含脱胶的基本状态，上下蒙皮的应变能是主要的，而芯层的应变能是次要的，完全可以忽略。这样，式 (6) 可简化为

$$\Pi_A^* = - \int_L \left[\frac{dW_2}{da} - q(x) \frac{dw}{da} \right] dL \quad (9)$$

3 实例分析

作为例子，分析图 2 示夹层悬臂梁，其长度足够长，在中央位置含一脱层段。本文中采用无量纲量，取 $t_c = 1$ ， $t_f = 0.1$ ， $a = 1.5$ ， $Q = 0.8$ ， $E_f = 1000$ ， $E_c = 1$ ， $G_c = 0.4$ ，此时参数 $\zeta = 0.01$ 。对基本状态采用 Allen 模型^[4] 进行计算，此时芯层内的剪应力是一常数 $\tau = Q/(2G_c t_c) = 1$ ，因此附加状态上的已知剪应力是 $\bar{\tau} = -1$ ，此时附加状态是反对称的，其解答与本文第 1 部分中实例分析中的结果相差 1 个负号。

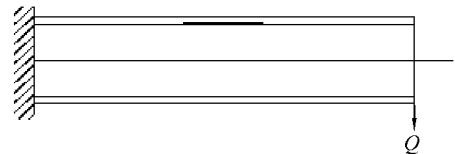


图 2 含脱层的夹层梁

Fig. 2 Sandwich beam with delamination

首先分析能量释放率随脱层长度 $2a$ 的变化情况。计算结果如图 3 所示，可见能量释放率随着 a 的增加而急剧地增加。

在图 4 中研究了附加状态的未脱层段的应变能在附加状态的总应变能中所占比重。当脱层长度较小时，未脱层段的影响较大，因而未脱层段的应变能对总应变能的贡献较大；而随着脱层长度逐渐增加，未脱层段对总应变能的贡献逐渐减少，基本上

趋向于 10%，因此在一般情况下，未脱层段的影响是不宜忽略的。

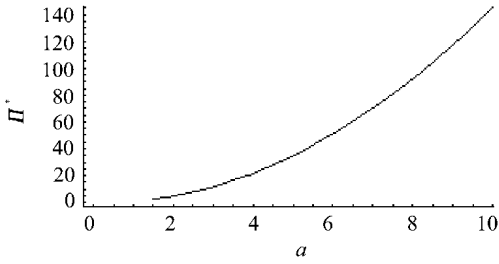


图 3 能量释放率随脱层长度的变化

Fig. 3 Varieties of energy release rate

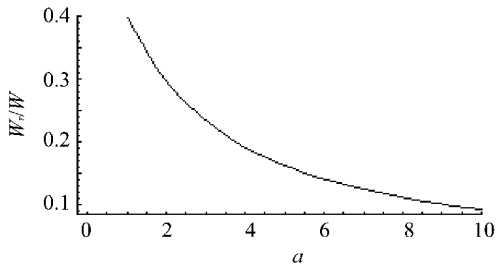


图 4 未脱层段的应变能对总应变能的影响

Fig. 4 Influence of strain energy in undelaminated sector compared to total strain energy

4 结 论

本文提出了计算夹层梁附加状态能量释放率的一种简便方法，比较了附加状态中蒙皮与芯层的应变能，并得到了前者相对于后者可以忽略这一结论；研究了未脱层段对附加状态总应变能的贡献，并认为这是一个不宜忽略的因素。

参考文献:

- [1] CARLSSON L A, PRASAD S. Interfacial fracture of sandwich beams[J] . Engineering Fracture Mechanics, 1993, 44 (4) : 581—590.
- [2] 王奇志, 孟庆春, 张行. 复合材料层合梁分层问题解析解[J] . 北京航空航天大学学报, 1998, 24(3) : 319—322.
- [3] FU M H, LIU Z Q. Delamination analysis of sandwich beam: High order theory[J] . AIAA J, 2002, 40(5) : 981—986.
- [4] GIBSON L J, ASBBY M F. Cellular solids-structure and properties[M] . Second Edi. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997: 1—396.

Calculation of Energy Release Rate for Delaminated Sandwich Beam

LIU Zuo qiu¹, XIAO Cheng feng², LIU Yao peng²

(1. Department of Earth Science, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering,

Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By the polynomial resolution of sandwich beam at additional state, a simplified method of calculating the energy release rate is proposed, and this method is a powerful tool for analyzing such fracture mechanics problems.

Key words: sandwich beam; delamination; additional state; energy release rate