

K-弱凸性与K-弱光滑性*

黎永锦, 舒小保

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 提出了K-弱凸性与K-弱光滑性, 作为K-强凸性与K-强光滑性的推广, 然后证明了K-弱凸性与K-弱光滑性是对偶性质; Banach空间X是非常凸的当且仅当X是严格凸的且K-弱凸的; Banach空间X是局部一致凸的当且仅当X是K-强凸的和严格凸的且具有(WM)性质.

关键词: K-弱凸性; K-弱光滑性; K-弱暴露点; (WM)性质

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 05-0008-03

1 有关的定义

Sullivan^[1]引进了局部K一致凸的概念, 南朝勋等^[2]定义了K-强光滑性并讨论了它的性质和它与其它凸性的许多关系. 苏雅拉图^[3]得到了K-强光滑性的共轭概念K-强凸性. 本文将引入K-弱凸性与K-弱光滑性的概念, 它们是K-强凸性和K-强光滑性的推广, 并建立它们之间的对偶关系. 最后, 本文还弄清了非常凸性与K-弱凸性, 局部一致凸性与K-强凸性, 局部弱一致凸性与K-弱凸性的关系.

定义1^[2] Banach空间X称为K-严格凸的, 若对X中的任意k+1个元素 x_1, x_2, \dots, x_{k+1} , 当

$$\left\| \sum_{i=1}^{k+1} x_i \right\| = \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|$$

时, x_1, x_2, \dots, x_{k+1} 是线性相关的.

定义2^[2] 设X为Banach空间, $x \in S(X)$, 若 $\dim S_x \leq K$, 则称x为X的一个K-光滑点, 若任意 $x \in S(X)$, x都是K-光滑点, 则称Banach空间X为K-光滑空间.

定义3^[2] 设X为K-光滑空间, 且对任意 $x \in S(X)$, 当 $f_n \in S(X^*), f_n(x) \rightarrow 1$ 时, $\{f_n\}$ 是相对紧集, 则称Banach空间X为K-强光滑空间.

定义4^[3] 设X为K-严格凸空间, 且对任意 $x \in S(X)$, 当 $x_n \in S(X)$, 及对某个 $f \in S(X^*)$, $f(x_n) \rightarrow 1$ 时, $\{x_n\}$ 是相对紧集, 则称Banach空间X为K-强凸空间.

定义5 设X为Banach空间, 对任意 $x \in S(X)$, 当 $x_n \in S(X)$, 及对某个 $f \in S(X^*)$, $f(x_n) \rightarrow 1$ 时, $\{x_n\}$ 是弱相对紧集, 且 $\{x_n\}$ 最多只有K个线

性无关的弱极限点, 则称Banach空间X为K-弱凸空间.

定义6 设X为Banach空间, 对任意 $x \in S(X)$, 当 $f_n \in S(X^*), f_n(x) \rightarrow 1$ 时, $\{f_n\}$ 是弱相对紧集, 且 $\{f_n\}$ 最多只有K个线性无关的弱极限点, 则称Banach空间X为K-弱光滑空间.

定义7^[3] 设X为Banach空间, $x \in S(X)$ 称为U(X)的K-强暴露点, 若存在 $f \in S(X^*)$, 使 $f(x) = 1$ 且 $\dim A_f \leq K$, 而且当 $x_n \in S(X), f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, $\text{dist}(x_n, A_f) \rightarrow 0$.

定义8 设X为Banach空间, $x \in S(X)$ 称为U(X)的K-弱暴露点, 若存在 $f \in S(X^*)$, 使 $f(x) = 1$ 且 $\dim A_f \leq K$, 而且当 $x_n \in S(x), f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 有 $y_n \in \text{co}(\{x_n\})$, 使得 $\text{dist}(y_n, A_f) \rightarrow 0$.

定义9^[4] 若对任意 $x \in S(X), x_n \in U(X), f_x \in A_x = \{f \in S(X^*), f(x) = 1\}, \|x_n + x\| \rightarrow 2$, 有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$ 使得 $f_x(x_{n_j}) \rightarrow 1$, 则称Banach空间具有(WM)性质.

命题1^[2] 设X为Banach空间.

- (1) 若 X^* 为K-光滑的, 则X为K-严格凸的.
- (2) 若 X^* 为K-严格凸的, 则X为K-光滑的.

2 主要定理

首先回顾 x_0 称为 $\{x_n\}$ 的(弱)极限点是指存在 $x_{n_j} \in \{x_n\}$, 使得 x_{n_j} (弱)收敛于 x_0 . 利用极限点可以得到K-强凸和K-强光滑的一个充要条件.

定理1 设X为Banach空间, 则

- (1) X为K-强凸空间的当且仅当对任意 $x \in S(X)$, 当 $x_n \in \{x_n\}$, 及对某个 $f \in S(X^*)$, $f(x_n) \rightarrow$

* 收稿日期: 2002-01-04

作者简介: 黎永锦 (1963年生) 男, 副教授; E-mail: stslvj@zsu.edu.cn

1 时, $\{x_n\}$ 是相对紧集, 且 $\{x_n\}$ 最多只有 K 个线性无关的极限点。

(2) Banach 空间 X 为 K -强光滑空间的当且仅当对任意 $x \in S(X)$, 当 $f_n \in S(X^*)$, $f_n(x) \rightarrow 1$ 时, $\{f_n\}$ 是相对紧集, 且 $\{f_n\}$ 最多只有 K 个线性无关的极限点。

以上定理容易从定义证明, 故这里略去。

定理 2 设 X 为 Banach 空间, 则

(1) 若 X^* 为 K -弱光滑的, 则 X 为 K -弱凸的。

(2) 若 X^* 为 K -弱凸的, 则 X 为 K -弱光滑的。

证明 (1) 由 X^* 为 K -弱光滑的易知, X^* 为 K -光滑的, 从而 X 为 K -严格凸的, 因此对任意 $x \in S(X)$, 当 $\|x_n\| = 1$ 及某个 $f \in S_x$, $f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 有

$$x_n(f) = f(x_n) \rightarrow 1$$

这里, $x_n \in S(X) \subset S(X^{**})$ 。

由于 X^* 为 K -弱光滑的, 因此 $\{x_n\}$ 是 X^{**} 中的弱相对紧集, 从而 $\{x_n\}$ 是 X 中的弱相对紧集, 所以 X 是 K -弱凸的。

(2) 由 X^* 为 K -弱凸的易知, X^* 为 K -严格凸的, 从而 X 为 K -光滑的, 因此对任意 $x \in S(X)$, 当 $\|f_n\| = 1$ 及 $f_n(x) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 存在 $\|f\| = 1$, 使得 $f(x) = 1$, 故有

$$x(f_n) = f_n(x) \rightarrow 1 \text{ 且 } x \in S_f$$

这里, $x \in S(X) \subset S(X^{**})$ 。

由于 X^* 为 K -弱凸的, 因此 $\{f_n\}$ 是弱相对紧集, 所以 X 是 K -弱光滑的。

对于自反的 Banach 空间, 有下面结论成立。

定理 3 若 X 是自反的 Banach 空间, 则 X 是 K -弱凸的充要条件是 X 是 K -严格凸的。

证明 明显地, 只需证明 X 是自反且 K -严格凸时 X 一定是 K -弱凸的。

如果 $x \in S(X)$, $\|x_n\| = 1$ 且对某个 $f \in S_x$, $f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则由于 X 是自反的, 因此 $\{x_n\}$ 是弱相对紧的, 又因为 X 是 K -严格凸的, 所以 X 一定是 K -弱凸的。

推论 1^[2] 自反 Banach 空间 X 是 K -强凸的当且仅当 X 是 K -严格凸且具有 (H) 性质。

定理 4 若 X 是自反的 Banach 空间, 则 X 是 K -弱光滑的充要条件是 X 是 K -光滑的。

定理 5 设 X 是 Banach 空间, 则 X^* 是 K -弱光滑的充要条件为: X 是自反的且 X 是 K -弱凸的。

证明 明显地, 只需证明 X^* 是 K -弱光滑时 X 是自反的。

设 $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, 则存在 $\|x_n\| = 1$, 使得

$f(x_n) \rightarrow 1$. 故 $x_n(f) = f(x_n) \rightarrow 1$. 由于 X^* 是 K -弱光滑的, 因此 $\{x_n\}$ 是 X^{**} 中的弱相对紧集, 从而 $\{x_n\}$ 是 X 中的弱相对紧集, 故存在 $x \in X$, 使得 x_n 弱收敛于 x , 因而 $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 因此 $f(x) = 1$, 且 $\|x\| = 1$, 由 James 定理可知 Banach 空间 X 自反。

推论 2^[2] X^* 是 K -强光滑的且仅当 X 是自反的且 X 是 K -严格凸且有 (H) 性质。

定理 6 若 X 是 K -弱凸的, 则任意 $x \in S(X)$ 都是 $U(X)$ 的 K -弱暴露点。

证明 对任意 $\|x\| = 1$, 由 Hahn-Banach 定理, 有 $f \in S(X^*)$, 使得 $f(x) = 1$. 假设 $\dim A_f > K$, 则有 $k+1$ 个线性无关的 $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in A_f$, 因此

$$k+1 = \sum_{i=1}^{k+1} f(x_i) \leq \|f\| \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\| = k+1$$

但 X 是 K -弱凸的, 因而 X 是 K -严格凸的, 故与 $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$, 线性无关矛盾, 因此 $\dim A_f < K$ 。

若 $x_n \in S(X)$, $f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则由于 X 是 K -弱凸的, 因此 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_j}\}$, 使得 x_{n_j} 弱收敛于 x' . 因而存在 $y_n \in \text{co}(\{x_{n_j}\})$ 收敛于 x' , 故 $\text{dist}(y_n, A_f) \rightarrow 0$, 所以 x 是 $U(X)$ 的 K -弱暴露点。

定理 7 若 X 是 K -弱光滑的, 则任意 $f \in \bigcup_{x \in S(X)} S_x$ 都是 $U(X^*)$ 的 K -弱暴露点。

证明 对任意 $f \in \bigcup_{x \in S(X)} S_x$, 有某个 S_x 使得 $f \in S_x$, 从而

$$f(x) = 1 \text{ 且 } \|f\| = \|x\|$$

故

$$x(f) = 1, \text{ 这里 } x \in S(X^{**}), f \in A_x$$

由于 X 是 K -光滑的, 因此

$$\dim S_x < K$$

从而

$$\dim A_x < K$$

当 $f_n \in S(X^*)$, $x(f_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 由于 X 是 K -弱光滑的, 因此 $\{f_n\}$ 是弱相对紧的, 故有 $\{f_{n_j}\} \subset \{f_n\}$, 使得 f_{n_j} 弱收敛于 f' , 因而存在 $g_n \in \text{co}(\{f_{n_j}\})$, 使得 $g_n \rightarrow f'$, 故

$$\text{dist}(g_n, A_x) \rightarrow 0$$

所以 f 是 $U(X^*)$ 的 K -弱暴露点。

最后, 我们理清了非常凸性与 K -弱凸性, 局部一致凸性与 K -强凸性, 局部弱一致凸性与 K -弱凸性的关系。

定理 8 若 X 是 Banach 空间, 则 X 是非常凸的当且仅当 X 是严格凸的且 K -弱凸的。

证明 明显地, 若 Banach 空间 X 是非常凸的,

则 X 是严格凸的且 K -弱凸的。

若 $x \in S(X)$, $\|x_n\| = 1$ 且对某个 $f \in S_x$, 有 $f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\{x_n\}$ 是弱相对紧集, 从而存在 x_{n_k} 弱收敛于 x' , 因此 $f(x') = 1$ 。由于 Banach 空间 X 是严格凸的, 因而 $x = x'$, 从而 x_{n_k} 弱收敛于 x , 所以 X 是非常凸的。

定理 9 若 X 是 Banach 空间, 则 X 是非常光滑的当且仅当 X 是光滑的且 K -弱光滑的。

定理 10 若 X 是 Banach 空间, 则 X 是局部一致凸的当且仅当 X 是 K -强凸的和严格凸的且具有 (WM) 性质。

证明 明显地, 若 Banach 空间 X 是局部一致凸的, 则 X 是 K -强凸的和严格凸的且具有 (WM) 性质, 因此只需证明 Banach 空间 X 是 K -强凸的和严格凸的且具有 (WM) 性质时 X 一定是局部一致凸的。

若 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$, 使得 $\|(x+y_n)/2\| \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则由于 X 具有 (WM) 性质, 因此有 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_j}\}$, 使得 $f_x(y_{n_j}) \rightarrow 1 (n_j \rightarrow \infty)$ 。由 Banach 空间 X 是 K -强凸的可知存在 $\{y_{n_{j_k}}\}$, 使得 $\{y_{n_{j_k}}\} \rightarrow y$ 。又因为 X 是严格凸的, 所以 $x = y$, 从而有 $y_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 因此 Banach 空间 X 是局部一致凸的。

定理 11 若 X 是 Banach 空间, 则 X 是局部一致凸的当且仅当 X 是 K -弱凸的和严格凸的且具有 (WM) 性质。

参考文献:

- [1] SULLIVAN F. A generalization of uniformly rotund Banach spaces[J]. Canad J Math, 1979, 31: 628-636.
- [2] 南朝勋, 王建华. K -严格凸性与 K -光滑性[J]. 数学年刊, 1990, 11A(3): 321-324.
- [3] 苏雅拉图, 吴从焱. K -强凸性与 K -强光滑性[J]. 数学年刊, 1998, 19A(3): 373-378.
- [4] PANDA B B, KAPOOR O P. A generalization of local uniform convexity of the norm[J]. J Math Anal Appl, 1975, 52: 300-308.
- [5] WU C X, LI Y J. Strong convexity in Banach spaces[J]. China J Math, 1993, 13: 105-108.
- [6] YU X T. On LKUR spaces[J]. China Ann of Math, 1985, 6B(4): 465-469.
- [7] LI B L, YU X T. On the K -uniform rotund and the fully convex Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1985, 110(2): 407-410.
- [8] DIESTEL J. Geometry of Banach spaces[M]. Selected Topics, Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag, 1975: 485.

K Weakly Convex and K Weakly Smooth

LI Yong jin, SHU Xiao bao

(Department of Mathematics, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhon 510275, China)

Abstract: The K weakly convex and K weakly smooth are defined. It is shown that K weakly convex and K weakly smooth are dual notions, Banach space X is very convex if and only if X is strictly convex and K weakly convex, and Banach space X is locally uniformly convex if and only if X is K strongly convex, strictly convex, and X has property (WM).

Key words: K weakly convex; K weakly smooth; K weakly exposed point; property (WM)