

上凸密度与 Hausdorff 测度 ——满足开集条件的自相似集^{*}

周作领

(中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘要: 对于满足开集条件的自相似集 E , 证明关于上凸密度的一个实现定理, 即证明存在 U , 满足 $|U| > 0$, 使得 $H^s(E \cap U) / |U|^s = 1$ 。作为应用给出计算这类分形的 Hausdorff 测度的一个表达式。最后提出某些问题和猜测。

关键词: 自相似集; Hausdorff 测度; 上凸密度

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 04-0106-02

当前分形几何的重要课题之一是计算或估计分形的 Hausdorff 维数与测度, 但这2个问题都十分困难, 特别是后者。上凸密度计算与 Hausdorff 测度计算密切相关。本文讨论与之有关的问题。

1 基本定义和几个问题

设 $n > 0$, $E \subset \mathbf{R}^n$ 和 $s \geq 0$ 并取 $\mathbf{R}^n$ 的通常度量。记 $\mathcal{A}$ 是 E 的一个可数覆盖。用 $|U|$ 表示集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ 的直径。设 $\delta > 0$ 。说 $\mathcal{A}$ 是 E 的一个 δ -覆盖, 记作 $\mathcal{A} < \delta$ 如果 $|U_i| \leq \delta, \forall i > 0$ 。设 $t \geq 0$, 定义

$$H^t(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\mathcal{A} < \delta} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \right\} \geq 0$$

称作 E 的 t -维 Hausdorff 测度。容易证明(见文[1]) 存在唯一的非负实数, 使得 $\begin{cases} H^t(E) = 0, & \text{当 } t > s \\ H^t(E) = \infty, & \text{当 } t < s \end{cases}$ 这个 s 称作 E 的 Hausdorff 维数, 记作 $s = \dim_H$, 而 E 的 Hausdorff 测度就是指 $\dim_H(E)$ -维测度。在 Hausdorff 测度的定义中包含2个极限过程。

问题1 是否或在什么条件下存在 E 的覆盖 $\mathcal{A} = \{U_i, i > 0\}$, 使得

$$H^s(E) = \sum_i |U_i|^s$$

这样的 $\mathcal{A} = \{U_i, i > 0\}$ 的称作 E 的最好覆盖。

设 $x \in \mathbf{R}^n$, 并记 $U(x)$ 是包含 x 的一个集合。定义

$$D_c^s(E, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 < |U(x)| \leq \delta} \left\{ \frac{H^s(E \cap U(x))}{|U(x)|^s} \right\} \geq 0$$

叫作 E 在 x 处的上凸密度。显然, 这里 $U(x)$ 可以取作凸集, 但注意 $U(x)$ 不一定是 x 的邻域, 即 x 不一定是 $U(x)$ 的内点。在上凸密度的定义中也包含2个

极限过程。上凸密度计算也是个非常困难的问题且与求 Hausdorff 测度有密切关系。关于上凸密度, 我们有以下结论^[1]。

设 E 是一个 s -集, 即 E 是 H^s 可测的且 $\dim_H(E) = s, 0 < H^s(E) < \infty$ 。则集合 $E_0 = \{x \in E : D_c^s(E, x) = 1\}$ 可测且 $H^s(E_0) = H^s(E)$ 。

问题2 是否或在什么条件下有 $E_0 = E$?

问题3 对 $x \in E$, 是否或在什么条件下存在 $U(x)$, $|U(x)| > 0$ 使得

$$D_c^s(E, x) = \frac{H^s(E \cap U(x))}{|U(x)|^s}$$

如果这样的 $U(x)$ 存在, 则这个式子称作 x 点的上凸密度的一个有限实现。

2 结果的陈述

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一个非空区域, 而 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是由 $m(> 1)$ 个相似压缩 $S_i : D \rightarrow D$ 定义的自相似集, 相似比分别为 $0 < c_i < 1, i = 1, 2, \dots, m$, 且满足开集条件, 即存在开集 V 满足

$$V = \bigcup_{i=1}^m S_i(V),$$

$$S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset, 0 < i < j \leq m$$

如果进而满足

$$S_i(E) \cap S_j(E) = \emptyset, 0 < i < j \leq m$$

则称 E 满足强分离条件^[1]。

定理1 设 E 是一个 s -集。任给 $\delta > 0$, 记 $d = \sup_{U \in \mathbf{R}^n, |U| = \delta} \left\{ \frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\}$, 则存在 $V \subset \mathbf{R}^n, |V| = \delta$

* 收稿日期: 2002-02-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171116); 国家教育部博士点基金资助项目 (1999055810); 广东省自然科学基金资助项目 (011221); 中山大学高等学术研究中心资助项目 (01M2)

作者简介: 周作领 (1938-), 男, 教授, 博士生导师, Email: lnsz1@zsu.edu.cn

使得 $d = \frac{H^s(E \cap V)}{|V|^s}$.

定理 2 设 E 是如上给定的满足开集条件的自相似集, 则存在 $U \subset \mathbf{R}^n, |U| > 0$, 使得 $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} = 1$.

本文称它为上凸密度 1 的有限实现定理, 简称实现定理.

推论 1 假设同定理 2, 则

$$H^s(E) = |U|^s \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

其中, $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} = 1$, 而 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ 是依赖 U 的一个正项收敛级数.

说明: 推论 1 给出计算满足开集条件的自相似集的 Hausdorff 测度的 1 个表达式, 但这个表达式依赖于满足条件 $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} = 1$ 的 U 的存在, 而对存在这样的 U , 我们的证明是存在性而非构造性的. 一般说来, 寻求这样的 U 也是非常困难的. 但是, 可以寻求这样的 U , 使得 $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \approx 1$, 从而得到 $H^s(E)$ 的上限估计, 且 $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s}$ 越接近 1, 估计结果越好. 这就是我们在文[2—5]中提出和使用的所谓“部分估计原理”(注意, 对满足开集条件的自相似集, 总有 $\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \leq 1$, 见文[4]).

推论 2 假设同定理 2, 则存在 E 的 H^s -几乎处处覆盖 $\mathcal{A} = \{U_i, i > 0\}$, 即 $H^s(E - \bigcup_{i>0} U_i) = 0$, 使得 $H^s(E) = \sum_{i>0} |U_i|^s$. 本文证明将在别处给出. 最后提出 2 个猜测.

猜测 1 记三分 Cantor 集的拓扑积(图 1)的一

个顶点为 A , 则 $D_c^s(E, A) < 1$. 这个问题看似简单, 但实际上却是十分困难的.

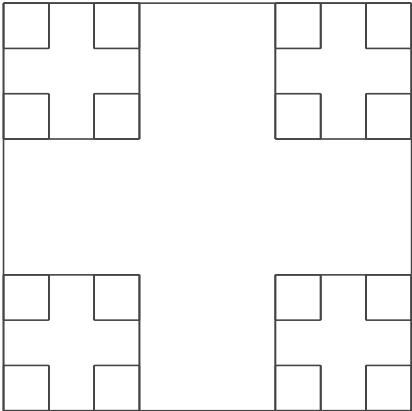


图 1 三分 Cantor 集与自身的乘积
Fig 1 The product of the middle third Cantor set with itself

猜测 2 假设同定理 2, 存在 E 的最好覆盖 $\mathcal{A} = \{U_i, i > 0\}$, 即 $H^s(E) = \sum_{i>0} |U_i|^s$ 当且仅当 $E_0 = E$.

参考文献:

[1] FALCONER K J. The geometry of fractal sets[M]. London: Cambridge University Press, 1985.
[2] 周作领. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 自然科学进展, 1997, 7(4): 405—409.
[3] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A 辑), 1997, 27(6): 491—496.
[4] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度-Koch 曲线[J]. 中国科学(A 辑), 1998, 28(2): 103—107.
[5] ZHOU Z L, FENG L. A new estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket[J]. Nonlinearity, 2000, 13: 479—491.

The Upper Convex Density and Hausdorff Measure

——The Self-similar Set Satisfying OSC

ZHOU Zuo ling

(Lingnan College, Sun Yat-sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For a self-similar set E satisfying OSC, a realization on the upper convex density is proved, that is, there is U with $|U| > 0$ such that $H^s(E \cap U) / |U|^s = 1$, and as its application, a formula for the calculation of the Hausdorff measure of E is obtained. Some problems and conjectures are also proposed.

Key words: self-similar set; Hausdorff measure; upper convex density