

卷积型积分微分方程解的渐近稳定性*

陈太道, 任崇勋

(琼州大学数学系, 海南 五指山 572200)

摘要: 研究了一类卷积型积分微分方程, 利用李雅普诺夫方法, 给出了判定 n 维系统中卷积型积分微分方程的零解一致渐近稳定性的定理以及其 Volterra 方程的零解渐近稳定性的定理, 推广了已有的结果.

关键词: 卷积型; 积分微分方程; 零解; 渐近稳定性

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 05-0022-03

本文研究一类卷积型积分微分方程

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds \quad (1)$$

其中, A 是 $n \times n$ 常数矩阵, $B(t)$ 是 $(0, \infty)$ 上 $n \times n$ 连续函数矩阵, 还研究了方程(1)的标量形式即 Volterra 方程:

$$x'(t) = a(t)x(t) + \int_0^t b(t-s)x(s)ds \quad (2)$$

文[1]给出了用特征方程根的位置表示的方程(1)的渐近稳定性定理, 文[2, 3]给出了判定方程(2)的零解一致渐近稳定性的定理. 下面首先将文[3]的结果推广到 n 维系统, 即得到方程(1)的解一致渐近稳定性定理, 其次得到方程(2)的 1 个新的结果.

1 主要结果

以 \mathbf{R}^n 表示实 n 维空间, 当 $x \in \mathbf{R}^n$, 以 $|x|$ 表示 x 的模, 以 $\|A\|$ 表示 $n \times n$ 矩阵模, 以 $\mu(A)$ 表示矩阵 A 的测度, 定义如下

$$\mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

关于矩阵测度有如下性质:

引理 1 对任意矩阵 A 和 B , 下列不等式成立:

1) $\text{Re } \lambda(A) \leq \mu(A)$,

其中, $\lambda(A)$ 是 A 的特征值;

2) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;

3) $\mu(A) \leq \|A\|$.

定理 1 设 $B(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上可积, 且

$$\mu(A) + \int_0^\infty \|B(t)\| dt < 0 \quad (3)$$

则方程(1)的零解一致渐近稳定.

证明 假设存在 S_0 , 使得

$$\det(S_0 I - A - B^*(S_0)) = 0, \text{Re } S_0 \geq 0$$

则存在矩阵 $A + B^*(S_0)$ 的特征值 $\lambda(A + B^*(S_0))$, 使得 $S_0 = \lambda(A + B^*(S_0))$. 由引理 1 得

$$\text{Re } S_0 = \text{Re } \lambda(A + B^*(S_0)) \leq$$

$$\mu(A + B^*(S_0)) \leq$$

$$\mu(A) + \mu(B^*(S_0)) \leq$$

$$\mu(A) + \|B^*(S_0)\| \leq$$

$$\mu(A) + \int_0^\infty \|B(t)\| dt < 0$$

此与 $\text{Re } S_0 \geq 0$ 相矛盾. 定理 1 证毕.

例 1 设 A 和 $B(t)$ 分别是 $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$,

$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & ce^{-\beta t} \\ ce^{-\beta t} & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, c$ 是实常

数, 利用模 $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, 容易验证当 $|c| < \alpha\beta$ 时, 方程(1)的零解是一致渐近稳定的.

2 Volterra 方程零解渐近稳定性定理

下面研究方程(2), 先证明 1 个引理.

引理 2 设在 $[0, \infty)$ 上存在非负函数 $V(t)$, 使得

$$V'(t) \leq -W(t) + r(t) \quad (4)$$

其中, $W(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上非负连续, $r(t) \in L^1[0, \infty)$, 若 $W'(t)$ 有上界或下界, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $W(t) \rightarrow 0$.

证明 不妨设 $W'(t)$ 有上界 $L > 0$, 如果当 $t \rightarrow \infty$ 时, $W(t) \rightarrow 0$, 则存在 $\epsilon > 0$ 和序列 $\{t_i\}$ 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, $t_i \rightarrow \infty$, 且 $W(t_i) \geq \epsilon$, 定义区间

* 收稿日期: 2001-12-06

作者简介: 陈太道 (1958年生), 男, 讲师.

$$I_i = \left[t_i - \frac{\epsilon}{2L}, t_i \right] \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

取 L 适当大使区间 I_i 互不相交. 对任意 $t \in I_i$, 有

$$\int_t^{t_i} W'(s) ds \leq L(t_i - t) \leq L \frac{\epsilon}{2L} = \frac{\epsilon}{2}$$

和

$$\int_t^{t_i} W'(s) ds = W(t_i) - W(t) \geq \epsilon - W(t)$$

故有 $W(t) \geq \frac{\epsilon}{2}, t \in I_i, i = 1, 2, \dots$, 由条件(4) 得

$$V(t) \leq V(t_0) - \int_{t_0}^t W(s) ds + \int_{t_0}^t r(s) ds \leq$$

$$V(t_0) - \sum_{i=1}^n \int_{t_i - \frac{\epsilon}{2L}}^{t_i} W(s) ds + \int_{t_0}^t r(s) ds \leq$$

$$V(t_0) - n \frac{\epsilon^2}{4L} + \int_{t_0}^t r(s) ds, t \geq t_0$$

当 n 充分大时, 上式产生 $V(t) < 0$, 此与 $V(t) \geq 0$ 矛盾, 引理 2 证毕.

定理 2 设 $\alpha(t), b(t) \in L^1[0, \infty)$, 函数 $\alpha(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上非负有界连续, $b(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上 3 次连续可微, 且

$$(-1)^k b^{(k)}(t) \leq 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

则方程 (2) 的零解渐近稳定.

证明 考虑泛函

$$V(t, x(\cdot)) = x^2(t) - 2 \int_0^t b(t-s)x(s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right] ds$$

则

$$V'_{(2)}(t, x(\cdot)) = 2a(t)x^2(t) - 2 \int_0^t b'(t-s)x(s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right] ds$$

由分部积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^t b(t-s)x(s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right] ds &= \\ \frac{1}{2} b(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 - & \\ \frac{1}{2} \int_0^t b'(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds & \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^t b'(t-s)x(s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right] ds &= \\ \frac{1}{2} b'(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 - & \\ \frac{1}{2} \int_0^t b''(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds & \end{aligned}$$

因此, 有

$$V(t, x(\cdot)) = x^2(t) - b(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 +$$

$$\int_0^t b'(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds$$

和

$$V'_{(2)}(t, x(\cdot)) = 2a(t)x^2(t) - b'(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 +$$

$$\int_0^t b''(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds$$

由 $b(t) \leq 0, b'(t) \geq 0$ 和 $b''(t) \leq 0$ 得

$$V(t, x(\cdot)) \geq x^2(t),$$

$$V'_{(2)}(t, x(\cdot)) \leq 2a(t)x^2(t)$$

因此, 对初始函数 φ 有

$$x^2(t, t_0, \varphi) \leq V(t, x(\cdot)) \leq$$

$$V(t_0, \varphi(\cdot)) \exp \left[2 \int_{t_0}^t a(s) ds \right] \quad (5)$$

从 $a(t) \in L^1[0, \infty)$, 对任意 $\epsilon > 0$, 可以找到 $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$, 使得当 $|\varphi(t)| < \epsilon, t \in [0, t_0]$ 时, 恒有 $|x(t, t_0, \varphi)| < \epsilon$ 对一切 $t \geq t_0$ 成立. 因此方程 (2) 的零解是稳定的.

现在定义泛函

$$\begin{aligned} r(t, x(\cdot)) &= 2a(t)x^2(t), \\ W(t, x(\cdot)) &= b'(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 - \\ &\int_0^t b''(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds \end{aligned}$$

由不等式 (5), 存在常数 $k > 0$ 使得对一切 $t \geq 0$ 有 $|x(t)| < k$, 令 $r(t) = r(t, x(\cdot))$, 则 $x(t) \in L^1[0, \infty)$. 注意到 $b'(t) \geq 0$ 和 $b''(t) \leq 0$, 有 $W(t) = W(t, x(\cdot)) \geq 0$, 故

$$V'_{(2)}(t, x(\cdot)) = -W(t, x(\cdot)) + r(t, x(\cdot))$$

则

$$\begin{aligned} W'_{(2)}(t, x(\cdot)) &= \\ b''(t) \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right]^2 - & \\ \int_0^t b'''(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds - & \\ 2x(t) \int_0^t b'(t-s)x(s) ds & \end{aligned}$$

注意到 $b''(t) \leq 0, b'''(t) \geq 0$, 有

$$W'_{(2)}(t, x(\cdot)) \leq -2x(t) \int_0^t b'(t-s)x(s) ds$$

由 $b(t) \leq 0, b'(t) \geq 0$, 得

$$\int_0^\infty b'(t) dt = b(\infty) - b(0) < \infty$$

又 $|x(t)| < k$, 因此 $W'_{(2)}(t, x(\cdot))$ 有上界. 则由引理 (2) 得到

$$W(t, x(\cdot)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t b''(t-s) \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds = 0$$

可以证明 $b''(t) < 0$, 故存在 $T > 0$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b''(T) \int_{t-T}^t \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds = 0$$

即
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t \left[\int_s^t x(\tau) d\tau \right]^2 ds = 0$$

假设当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$, 则存在 $\eta > 0$ 和序列 $\{t_i\}$, 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时 $t_i \rightarrow \infty$ 且 $|x(t_i)| > \eta$, 因 $a(t)$ 有界, $b(t) \in L^1[0, \infty)$, 故有 $|x'(t)| < L$, 则存在 $\mu > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$|x(t)| > \mu, \forall t \in [t_i - \delta, t_i]$$

因此有

$$\int_{t_i - \delta}^{t_i} \left[\int_s^{t_i} x(\tau) d\tau \right]^2 ds \geq \mu^2 \int_{t_i - \delta}^{t_i} (t_i - s)^2 ds = \frac{1}{3} \mu^2 \delta^3 > 0$$

此矛盾完成了定理的证明。

例 2 在方程 (2) 中设

$$a(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, b(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

此时, 有

$$a(t) + \int_0^\infty |b(t)| dt = \frac{1}{(t+1)^2} + 1 > 0, t \geq 0$$

满足定理 (2) 的全部条件, 因此方程的零解是渐近稳定的。

参考文献:

- [1] GROSSMAN S I, MILLER R K. Nonlinear Volterra integro-differential systems with L^1 -Kernels[J]. J Diff Eqs 1973, 13: 551-556.
- [2] BRANER F. Asymptotic stability of a class of integrodifferential equations[J]. J Diff Eqs 1978, 28: 180-188.
- [3] BURTON T A, MAHFOUD W E. Stability criteria for Volterra equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1983, 279: 143-173.

Asymptotic Stability of Integrodifferential Equations of the Convolution Type

CHEN Tai dao, REN Chong xun

(Department of Mathematics, Qiongzhou University, Wuzhishan Hainan 572200, China)

Abstract: A class of integrodifferential equations of the convolution type is studied. A theorem to judgem asymptotic stability of zero solution of this equation is obtained by Lyapunov method, and a theorem to judge asymptotic stability of zero solution of Volterra equation of this integrodifferential equation is obtained. These theorems expand existing results.

Key words: convolution type; integrodifferential equation; zero solution; asymptotic stability