

相空间中完整约束系统的形式不变性^{*}

王树勇¹, 梅凤翔²

(1. 广东水利电力职业技术学院, 广东 广州 510635;

2. 北京理工大学应用力学系, 北京 100081)

摘 要: 研究相空间中完整力学系统正则方程的形式不变性, 建立了完整约束系统形式不变性的确定方程和限制方程, 给出了形式不变性导致守恒量的结构方程以及守恒量的形式, 导出了形式不变性与 Lie 对称性的关系, 并举例说明结果的应用。

关键词: 分析力学; 相空间; 形式不变性; Lie 对称性

中图分类号: O316 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 06-0010-04

力学系统的守恒量 (不变量) 反映了深刻的物理本质。1918 年 Noether 研究 Hamilton 作用量泛函在时空无限小变换群作用下的不变性时, 揭示了力学系统守恒量与对称性之间的关系, 提出了著名的 Noether 定理。1979 年, Lutzky^[1] 将 Lie 研究微分方程的不变性的扩展群方法引入力学领域, 提出了使力学系统运动微分方程不变的 Lie 对称性, 从而促使人们从不同的角度去重新认识对称性。20 多年来, 关于动力学系统的 Lie 对称性与守恒量的研究取得了重要进展^[2-4]。

形式不变是系统的动力学函数在无限小变换下仍然满足运动方程的一种不变性, 这种不变性不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性, 形式不变性在一定条件下也可导致守恒量。文 [5-7] 分别研究了 Lagrange 系统, Appell 方程, Nielsen 方程的形式不变性, 文 [8] 研究了非完整系统方程的形式不变性及与 Lie 对称性之间的关系, 文 [9] 用一张图给出了 Noether 对称性、Lie 对称性与形式不变性之间的关系。本文主要研究相空间中完整约束系统正则方程的形式不变性及与 Lie 对称性的关系。

1 完整约束系统的正则方程

研究由 N 个质点组成的力学系统。设系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1, \dots, n$) 来确定, 其运动有 g 个完整约束

$$f_\beta(t, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad \beta = 1, \dots, g \quad (1)$$

则系统的运动微分方程可表为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}, \quad s = 1, \dots, n \quad (2)$$

其中, $L = T - V$ 为系统的 Lagrange 函数, T 为系统的动能, V 为势能, Q_s 为非势广义力, λ_β 为约束乘子。

引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, H = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L, \quad s = 1, \dots, n \quad (3)$$

则方程 (2) 可表为正则形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, p_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}, \quad s = 1, \dots, n \quad (4)$$

设系统非奇异, 在运动微分方程积分之前, 可由方程 (1)、(2) 和 (4) 将 λ_β 表为 t, q, p 的函数, 则方程 (4) 成为

* 收稿日期: 2002-01-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19972010)

作者简介: 王树勇 (1958 年生), 男, 副教授, 北京理工大学博士生; E-mail: gwswy@gdsdx.edu.cn

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad p_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \Lambda_s, \quad \Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s}, \quad s = 1, \cdots, n \quad (5)$$

2 系统在相空间中的形式不变性

在增广相空间中，引进无限小单参数变换群

$$t^* = t + \epsilon \eta_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad q_s^* = q_s + \epsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad p_s^* = p_s + \epsilon \zeta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \quad (6)$$

其无限小生成元向量和一次扩展分别为

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial}{\partial p_k} \\ X^{(1)} &= X^{(0)} + \sum_{k=1}^n (\xi_k - \dot{q}_k \eta_0) \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n (\zeta_k - p_k \eta_0) \frac{\partial}{\partial p_k} \end{aligned} \quad (7)$$

其中， ϵ 为无限小参数， η_0, ξ_s, ζ_s 为无限小生成元。

假设在无限小变换(6)下,Hamilton 函数 H 成为 $H^* = H(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$, 非势广义力 Q_s 成为 $Q_s^* = Q_s(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$, f_{β} 成为 $f_{\beta}^* = f_{\beta}(t^*, \boldsymbol{q}^*)$, 而 Λ_s 成为 $\Lambda_s^* = \Lambda_s(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ 。

定义 1 若约束 (1) 和方程 (5) 在增广相空间中的无限小变换 (6) 下形式保持不变, 即

$$f_{\beta}^*(t, \boldsymbol{q}) = 0, \quad \beta = 1, \cdots, g \quad (8)$$

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, p_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} + Q_s^* + \Lambda_s^*, \quad s = 1, \cdots, n \quad (9)$$

则这种不变性称为完整约束系统在增广相空间中的形式不变性。

命题 1 如果无限小生成元 η_0, ξ_s, ζ_s 满足

$$X^{(0)}(f_{\beta}) = 0, \quad \beta = 1, \cdots, g \quad (10)$$

$$\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s} = 0, \quad -\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial q_s} + X^{(0)}(Q_s) + X^{(0)}(\Lambda_s) = 0, \quad s = 1, \cdots, n \quad (11)$$

则完整约束系统在增广相空间中是形式不变的。

证明 由于

$$\begin{aligned} H^* &= H + \epsilon X^{(0)}(H) + O(\epsilon^2), \quad Q_s^* = Q_s + \epsilon X^{(0)}(Q_s) + O(\epsilon^2), \\ \Lambda_s^* &= \Lambda_s + \epsilon X^{(0)}(\Lambda_s) + O(\epsilon^2), \quad f_{\beta}^* = f_{\beta} + \epsilon X^{(0)}(f_{\beta}) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

将上述展式代入式(8)和(9), 考虑到式(1)和(5), 忽略 ϵ^2 及以上高阶小项, 命题 1 得证。

式(10)称为完整约束(1)在无限小变换(6)下的限制方程, 式(11)称为完整约束系统在增广相空间中的形式不变性确定方程。

3 结构方程与守恒量

形式不变性不一定导致守恒量, 下面的命题给出在增广相空间中形式不变性导致守恒量的条件和守恒量的形式。

命题 2 对于在增广相空间中具有形式不变性的完整约束系统, 如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足结构方程

$$-H\eta_0 - X^{(0)}(H) + \sum_{s=1}^n p_s \xi_s + \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \zeta_s + \sum_{s=1}^n (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s \eta_0) + G = 0 \quad (12)$$

则系统存在守恒量

$$I = \sum_{s=1}^n p_s \xi_s - H\eta_0 + G = \text{const} \quad (13)$$

证明 将 $I = \sum_{s=1}^n p_s \xi_s - H\eta_0 + G$ 对时间求导, 考虑到式(5)和(12), 有 $\frac{dI}{dt} = 0$, 故命题 2 成立。

4 系统在相空间中的形式不变性和 Lie 对称性的关系

Lie 方法的基本思想是使运动微分方程和约束方程在无限小变换下保持不变。

定义 2 如果系统正则方程 (5) 及约束 (1) 在无限小变换 (6) 下保持不变, 即式 (10) 成立和

$$X^{(1)}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)=0, \quad X^{(1)}\left(p_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}-Q_s-\Lambda_s\right)=0, \quad s=1, \cdots, n \tag{14}$$

则这种不变性称为完整约束系统在增广相空间中的 Lie 对称性。

式 (14) 归结为

$$\xi_s-\dot{q}_s\eta_0=X^{(0)}\left[\frac{\partial H}{\partial p_s}\right], \quad \zeta_s-p_s\eta_0=-X^{(0)}\left[\frac{\partial H}{\partial q_s}\right]+X^{(0)}\left(Q_s\right)+X^{(0)}\left(\Lambda_s\right), \quad s=1, \cdots, n \tag{15}$$

式 (15) 称为完整约束系统在增广相空间中的 Lie 对称性确定方程。

由定义看出, 形式不变性与 Lie 对称性一般是不同的。我们有如下命题:

命题 3 在增广相空间中, 完整约束系统形式不变性是 Lie 对称性的充分必要条件是

$$\begin{cases} \xi_s-\dot{q}_s\eta_0+\frac{\partial\eta_0}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\zeta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0 \\ \zeta_s-p_s\eta_0-\frac{\partial\eta_0}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial\alpha}-\sum_{k=1}^n\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial q_k}-\sum_{k=1}^n\frac{\partial\zeta_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0 \end{cases} \quad s=1, \cdots, n \tag{16}$$

证明 由于

$$\begin{cases} \frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s}=X^{(0)}\left[\frac{\partial H}{\partial p_s}\right]+\frac{\partial\eta_0}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\zeta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial q_s}=X^{(0)}\left[\frac{\partial H}{\partial q_s}\right]+\frac{\partial\eta_0}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\zeta_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \quad s=1, \cdots, n$$

将上式代入式 (11), 并与式 (15) 比较, 则命题 3 得证。

容易得到以下推论:

推论 1 如果无限小生成元 η_0, ξ_s, ζ_s 不显含 q 和 p , 且满足

$$\xi-\eta_0\frac{\partial H}{\partial p_s}=0, \quad \zeta_s+\eta_0\left[\frac{\partial H}{\partial q_s}-Q_s-\Lambda_s\right]=0, \quad s=1, \cdots, n \tag{17}$$

则系统的形式不变性就是 Lie 对称的。

推论 2 如果无限小生成元 η_0, ξ_s, ζ_s 为常数, 则系统的形式不变性与 Lie 对称性等价。

5 算 例

一力学系统的 Lagrange 函数、非势广义力和约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2, \quad Q_1=-\dot{q}_2, \quad Q_2=\dot{q}_1, \quad f_1=q_2-q_1=0$$

研究其在相空间中的形式不变性和 Lie 对称性。

可求得

$$p_1=\dot{q}_1, p_2=\dot{q}_2, H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2, \Lambda_1=\frac{p_1+p_2-1}{2}, \Lambda_2=\frac{1-p_1-p_2}{2}$$

约束的限制方程 (10) 给出

$$X^{(0)}(f_1)=\xi_2-\xi_1=0 \tag{18}$$

形式不变性的确定方程 (11) 为

$$\begin{cases} \frac{\partial\xi_2}{\partial p_1}+\zeta_1+p_1\frac{\partial\xi_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial p_1}=0 \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial p_2}+\zeta_2+p_1\frac{\partial\xi_1}{\partial p_2}+p_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial p_2}=0 \\ -\frac{\partial\xi_2}{\partial q_1}-p_1\frac{\partial\xi_1}{\partial q_1}-p_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial q_1}-\zeta_2+\frac{1}{2}\zeta_1+\frac{1}{2}\zeta_2=0 \\ -\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}-p_1\frac{\partial\xi_1}{\partial q_2}-p_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial q_2}+\zeta_1-\frac{1}{2}\zeta_1-\frac{1}{2}\zeta_2=0 \end{cases} \tag{19}$$

取无限小生成元 $\eta_0=0, \xi_1=\xi_2=p_1+p_2, \xi_1=\xi_2=-1$, 显然式 (18) 和 (19) 成立, 因此系统在对应的

变换下是形式不变的; 无限小生成元满足式 (16), 可知系统在对应的变换下也是 Lie 对称的; 取规范函数

$G = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2)^2 + q_1 + q_2$, 由命题 2, 系统存在守恒量

$$I = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)^2 + q_1 + q_2 = \text{const}$$

若取无限小生成元 $\eta_0 = 0, \zeta_1 = \zeta_2 = t, \zeta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{p_1 + p_2}$, 式 (18) 和 (19) 成立, 因此系统在对应的变换下也是形式不变的; 但无限小生成元不满足式 (16), 故系统在对应的变换下不是 Lie 对称的; 取规范函数

$G = t^2 \dot{h} - q_1 - q_2$, 系统存在守恒量

$$I = (p_1 + p_2)t + t^2 \dot{h} - q_1 - q_2 = \text{const}$$

本文建立了相空间中完整约束系统形式不变性的确定方程和限制方程, 给出了形式不变性导致守恒量的结构方程以及守恒量的形式, 导出了形式不变性与 Lie 对称性的关系; 从算例可知, 有些力学系统在无限小变换下是形式不变的, 但不是 Lie 对称的, 却能得到守恒量。这提供了寻找力学系统守恒量的又一新途径: 用 Lie 对称性不能找到的守恒量有可能通过形式不变性来获得。

参考文献:

- [1] LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phys A: Math Gen, 1979, 12(7): 973—981.
- [2] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, 23(3): 360—372.
- [3] 张毅, 梅凤翔. 相空间中单面完整约束系统的 Lie 对称性研究[J]. 北京理工大学学报, 1999, 19(5): 531—537.
- [4] 梅凤翔. 具有可积微分约束的力学系统的 Lie 对称性[J]. 力学学报, 2000, 32(4): 466—472.
- [5] MEI F X. Form invariance of Lagrange system[J]. J Beijing Institute of Technology, 2000, 9(2): 120—124.
- [6] MEI F X. Form invariance of Appell equations[J]. Chinese Physics, 2001, 10(3): 177—180.
- [7] WANG S Y, MEI F X. On the form invariance of Nielsen equations[J]. Chinese Physics, 2001, 10(5): 373—375.
- [8] WANG S Y, MEI F X. Form invariance and Lie symmetry of equations of non-holonomic system[J]. Chinese Physics, 2002, 11(01): 5—8.
- [9] 梅凤翔. 关于 Noether 对称性, Lie 对称性和形式不变性[J]. 北京理工大学学报, 2001, 21(4): 535—536.

Form Invariance of Holonomic Systems in Phase Space

WANG Shu yong¹, MEI Feng xiang²

(1. Guangdong Technical College of Water Resources and Electric Engineering, Guangzhou 510635, China;

2. Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The form invariance of holonomic systems in phase space is presented. Firstly, the determining equations and the restriction equations of the form invariance of the systems under the infinitesimal transformations are obtained. The structure equations and the form of conserved quantities are given. Then, the relation between the form invariance and Lie symmetry of the systems is deduced. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

Key words: analytical mechanics; phase space; form invariance; Lie symmetry