第41卷 第5期　　中山大学学报(自然科学版)　　Vol. 41 No. 5
2002年 9月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sep. 2002

电感耦合电路耦合部分的量子涨落及其压缩*

梁麦林, 袁　兵
(天津大学理学院应用物理系, 天津 300072)

摘　要: 对于电感耦合电路, 讨论了一种实际的状态演化情况。当电路参数即电容和电感按照一定规律变化时, 压缩可以产生。同时特别关注了以往未加深入研究的耦合部分的量子涨落。当电路的参数不随时间变化时, 也可以有压缩产生。这种压缩完全是由耦合引起的。

关键词: 电感耦合; 耦合部分; 量子涨落; 压缩
中图分类号: TN201; O413.1　　文献标识码: A　　文章编号: 0529-6579 (2002) 05-0031-03

随着电子电路集程度的提高, 电路中的量子效应越来越引起了人们的关注。近来有关纳米电子器件作为量子计算机中量子位或量子逻辑门和量子线路的讨论, 也使得对电路中量子效应的研究又有了新的意义[1]。有许多作者已对介观电路中电荷和电流的量子涨落进行了很多研究[2-12]。但这些研究均未涉及电路耦合部分的情况。实际上, 电路耦合部分对两个分回路的信息交换是不可缺少的, 因而也应该是加以研究的一个重要方面。

本文研究无耗散的含时电感耦合电路。我们考虑一种实际的演化情况。初始时, 两个分回路无耦合(相当于耦合电感等于零), 各分回路处于相应的基态或真空态。然后调节耦合电感使其不为零, 两个分回路开始有耦合, 从而整个电路系统开始演化。我们给出两分回路及耦合部分演化的精确结果, 并分析噪音压缩情况。

1　含时电感耦合电路的精确解

电容和电感随时间变化的介观电感耦合电路的哈密顿量可以写出为

$$H=\frac{p_1^2}{2L_1}+\frac{p_2^2}{2L_2}+\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2}+\frac{1}{2}L\left(\frac{p_1}{L_1}+\frac{p_2}{L_2}\right)^2-q_1\varepsilon_1(t)-q_2\varepsilon_2(t) \tag{1}$$

其中, L_j, C_j, q_j 和 ε_j, $j=1,2$ 分别是两个分回路中的电感、电容、电荷和电源, L 是耦合电感。将耦合电路当作一个物理体系, 电荷就是相应的广义坐标。与之对应的广义动量分别为 $p_1=L_1\dot{q}_1$, $p_2=L_2\dot{q}_2$。广义动量实际是电感中的磁通量。物理量上方的点代表对时间求导。通过适当的变换, 能够将哈密顿对角化。令

$$\begin{aligned}q_1&=\frac{1}{\rho}[Q_2\sin\varphi+Q_1\cos\varphi]\\ q_2&=\rho[Q_2\cos\varphi+Q_1\sin\varphi]\\ p_1&=\rho[P_2\sin\varphi+P_1\cos\varphi]\\ p_2&=\frac{1}{\rho}[P_2\cos\varphi+P_1\sin\varphi]\end{aligned} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式并令非对角项的系数为0, 得到

$$H=\frac{1}{2M_1}P_1^2+\frac{1}{2M_2}P_2^2+\frac{1}{2}M_1\Omega_1^2Q_1^2+\frac{1}{2}M_2\Omega_2^2Q_2^2-Q_1e_1(t)-Q_2e_2(t) \tag{3}$$

其中, $M_1\Omega_1^2=M_2\Omega_2^2=1\backslash\sqrt{C_1C_2}$

$$\begin{aligned}e_1(t)&=(\varepsilon_1\cos\varphi-\varepsilon_2\rho^2\sin\varphi)/\rho\\ e_2(t)&=(\varepsilon_1\sin\varphi+\varepsilon_2\rho^2\cos\varphi)/\rho\end{aligned} \tag{4}$$

对文献[6]中式(15, 16)中的量作代换 $\varphi\to2\varphi$ 就成为这里质量 $M_{1,2}$ 的形式。参量 $\rho=\left(C_2/C_1\right)^{1/4}$, 而角度 φ 满足

$$\tan 2\varphi=\frac{\dfrac{2L}{L_1L_2}}{\dfrac{\rho^2}{L_1}\left(1+\dfrac{L}{L_1}\right)-\dfrac{1}{\rho^2L_2}\left(1+\dfrac{L}{L_2}\right)} \tag{5}$$

形式上式(3)是两个独立的谐振子 Q_1 和 Q_2, 但实际上不是, 因为 $\partial Q_j/\partial t\neq0$, $j=1, 2$。这使得问题变得非常复杂。为了避免数学处理上的困难性, 我们讨论两个分回路中的电感成正比, 同时与耦合电感成正比, 两个分回路中的电容成正比的情况。在这种条件下, 角度 φ 和参量 ρ 以及(2)式中的

* 收稿日期: 2002-03-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (20176035)
作者简介: 梁麦林 (1963年生), 男, 副教授; E-mail: mailinliang@eyou.com

参数将不含时间，$\partial Q_j/\partial t=0$，$j=1,2$，(3) 式成为两个独立振子 Q_1 和 Q_2 体系。在海森堡绘景中，Q_j 的运动方程为

$$\frac{d}{dt}(M_j\dot{Q}_j)+M_j\omega_j^2 Q_j=e_j(t) \qquad (6)$$

该方程是一个质量和频率含时的受迫谐振子，由于其重要性，人们对 $e_j(t)=0$ 即非受迫的情况发展了多种方法进行求解[13]，这些方法主要是在薛定谔绘景中的。我们曾在海森堡绘景中对 $e_j(t)\neq 0$ 的情况时行了精确求解[12]，对讨论涨落的演化比较方便。方程(6) 的精确解可表示为[12]

$$Q_j(t)=A_j g_j(t)\cos\left(\int_0^t \frac{1}{M_j g_j^2(\tau)}d\tau+\theta_j\right)+Q_{js}(t) \qquad (7)$$

上式中 $Q_{js}(t)$ 是方程(6) 的经典特解，A_j，θ_j 是由初始条件确定的常数。做代换 $L\to M_j$，文献[12] 中的(11) 式就是函数 $g_j(t)$ 满足的方程。利用初始条件 $Q_j(0)=Q_{j0}$，$\dot{Q}_j(0)=\dot{Q}_{j0}$，常数 A_j，θ_j 被 Q_{j0}，$\dot{Q}_{j0}$ 代替（这里以及下文中下脚标零表示初始值），$Q_j(t)$ 可重写为

$$Q_j(t)=a_j(t)Q_{j0}+b_j(t)\dot{Q}_{j0}+f_j(t) \qquad (8)$$

式中的函数

$$f_j(t)=Q_{js}(t)-a_j(t)Q_{js0}-b_j(t)\dot{Q}_{js0}$$

同样将文献 [12] 中式 (12) 的量做代换 $L\to M_j$，就会得到这里的系数 $a_j(t)$ 和 $b_j(t)$。与 $Q_j(t)$ 对应的广义动量

$$P_j(t)=M_j(t)\dot{Q}_j(t)= M_j(t)[\dot{a}_j(t)Q_{j0}+\dot{b}_j(t)\dot{Q}_{j0}]+M_j(t)\dot{f}_j(t) \qquad (9)$$

由(9) 式的第一个等式得到关系 $\dot{Q}_{j0}=P_{j0}/M_{j0}$。利用(2) 式可得 Q_{j0}，P_{j0} 与 q_{j0}，p_{j0} 的关系，将此关系以及 $\dot{Q}_{j0}=P_{j0}/M_{j0}$ 代入(8) 和(9) 式，然后再代入(2) 式，最终得到 $q_j(t)$，$p_j(t)$ 与初始值之间的关系

$$\begin{aligned}
q_1(t)=\;& q_{10}[a_2(t)\sin^2\varphi+a_1(t)\cos^2\varphi]+\\
& q_{20}\frac{\sin 2\varphi}{2\rho^2}[a_2(t)-a_1(t)]+\\
& p_{10}\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\sin^2\varphi}{M_{20}}b_2(t)+\frac{\cos^2\varphi}{M_{10}}b_1(t)\right]+\\
& p_{20}\frac{\sin 2\varphi}{2}\left[\frac{1}{M_{20}}b_2(t)+\frac{1}{M_{10}}b_1(t)\right]+\\
& \frac{1}{\rho}[f_2(t)\sin\varphi+f_1(t)\cos\varphi]\\
p_1(t)=\;& q_{10}\rho^2[M_2\dot{a}_2(t)\sin^2\varphi+M_1\dot{a}_1(t)\cos^2\varphi]+\\
& q_{20}\frac{\sin 2\varphi}{2}[M_2\dot{a}_2(t)-M_1\dot{a}_1(t)]+\\
& p_{10}\left[\frac{\sin^2\varphi}{M_{20}}M_2\dot{b}_2(t)+\frac{\cos^2\varphi}{M_{10}}M_1\dot{b}_1(t)\right]+\\
& p_{20}\frac{\rho^2\sin 2\varphi}{2}\left[\frac{M_2}{M_{20}}\dot{b}_2(t)-\frac{M_1}{M_{10}}\dot{b}_1(t)\right]+\\
& \rho[M_2\dot{f}_2(t)\sin\varphi+M_1\dot{f}_1(t)\cos\varphi] \qquad (10)
\end{aligned}$$

第二个回路中的电荷和磁通量有类似的形式。考虑电路的一个实际演化过程：开始时，两个分回路无耦合，电源也没有接入电路，各分回路都处于基态或真空态。电荷与磁通量的涨落就可以由 (10) 式得到，例如

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta q_1)^2\rangle=\;&\langle(q_{10})^2\rangle[a_2(t)\sin^2\varphi+a_1(t)\cos^2\varphi]^2+\\
&\langle(q_{20})^2\rangle\left\{\frac{\sin 2\varphi}{2\rho^2}[a_2(t)-a_1(t)]\right\}^2+\\
&\langle(p_{10})^2\rangle\left\{\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\sin^2\varphi}{M_{20}}b_2(t)+\frac{\cos^2\varphi}{M_{10}}b_1(t)\right]\right\}^2+\\
&\langle(p_{20})^2\rangle\left\{\frac{\sin 2\varphi}{2}\left[\frac{1}{M_{20}}b_2(t)-\frac{1}{M_{10}}b_1(t)\right]\right\}^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$

其中 $\langle(q_{j0})^2\rangle=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C_{j0}}{L_{j0}}}$，$\langle(p_{j0})^2\rangle=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{L_{j0}}{C_{j0}}}$。其他量的涨落形式，限于篇幅，这里就不再写出了。与文献 [12] 中类似，质量指数增加，会使电荷涨落减小，并出现压缩；质量指数减小会使磁通量出现压缩。

2 耦合部分的量子涨落

耦合部分电路中的电荷 $q_{12}=q_1-q_2$ 和电流 $\dot{q}_{12}=\dot{q}_1-\dot{q}_2$ 的量子涨落，按照定义变成如下形式

$$\begin{aligned}
&\langle\Delta q_{12}^2\rangle=\langle\Delta q_1^2\rangle\langle\Delta q_2^2\rangle-\\
&2[\langle q_1q_2\rangle-\langle q_1\rangle\langle q_2\rangle]\\
&\langle\Delta\dot{q}_{12}^2\rangle=\langle\Delta\dot{q}_1^2\rangle\langle\Delta\dot{q}_2^2\rangle-\\
&\frac{2}{L_1L_2}[\langle p_1p_2\rangle-\langle p_1\rangle\langle p_2\rangle]
\end{aligned} \qquad (12)$$

为了得到耦合区域电荷和电流涨落的一个简洁形式，我们下面考虑电路中的参数即电容和电感不随时间变化，且两分回路发生共振的情况 $L_1=L_2$，$C_1=C_2$。在这样的前提条件下经过一定的运算后，得到

$$\begin{aligned}
&[\langle p_1(t)p_2(t)\rangle-\langle p_1(t)\rangle\langle p_2(t)\rangle]=\\
&\frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\frac{L}{L_1+L}\sin^2\Omega_1t\geqslant 0\\
&[\langle q_1(t)q_2(t)\rangle-\langle q_1(t)\rangle\langle q_2(t)\rangle]=\\
&\frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}L\sin^2\Omega_1t\leqslant 0
\end{aligned} \qquad (13)$$

结合 (12) 式，耦合部分的电流涨落小于或等于两分回路中的涨落之和，而电荷的涨落大于或等于两分回路中的涨落之和。如果将 $L=0$ 时耦合部分的涨落作为标准涨落，则电感耦合可使耦合部分的电

流涨落得到压缩，这完全是由于耦合引起的压缩效应。

在式 $L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$ 的前提条件下，利用 (14) 式也可得分回路中的涨落

$$\langle(\Delta q_1(t))^2\rangle = \langle(\Delta q_2(t))^2\rangle = \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\left(1+\frac{L}{2L_1}\sin^2\Omega t\right)$$
$$\langle(\Delta p_1(t))^2\rangle = \langle(\Delta p_2(t))^2\rangle = \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left[1-\frac{L}{2(L_1+L)}\sin^2\Omega t\right] \quad (14)$$

两式的第一项都是单一 LC 电路处于真空态时的涨落。式 (14) 表明，电感耦合可使磁通量产生压缩效应。这里的压缩效应与文献 [5] 中的不同，压缩效应依赖于两个分回路中的参数之比，而这里的压缩效应只与耦合有关。只要有耦合，就会有这样的压缩存在。

3　结束语

本文讨论了电容和电感随时间变化的电感耦合电路中分回路及耦合部分的量子涨落。对于一种实际的演化情况，具体计算表明，如果电路中的参数随时间变化，压缩能够在电路中产生。对于电路耦合部分，电荷和电流的涨落由于耦合而不等于两分回路涨落的简单相加。这些研究有助于更深入理解介观电路的量子效应以及耦合谐振子的相关性质。

参考文献：

[1] MAKHLIN Y, SCHON G, SCHNIRMAN A. Josephson-junction qubits with controlled couplings[J]. Nature, 1999, 398(6725): 305—307.

[2] BUTTIKER M. Mesoscopic capacitors[J]. Phys Lett(A), 1993, 180(4/5): 364—369.

[3] 陈斌, 方挥, 焦正宽. 介观电路中电荷电流的量子涨落[J]. 科学通报, 1996, 41(13): 1170—1172.

[4] 王继所, 刘堂昆, 詹明生. 无耗散介观电感耦合电路的量子效应[J]. 光子学报, 2000, 29(1): 22—25.

[5] 陈斌, 李有泉. 介观耦合电路的量子压缩效应[J]. 科学通报, 1996, 41(14): 1275—1277.

[6] 王继锁, 冯健, 詹明生. 无耗散介观电感耦合电路的库仑阻塞和电荷的量子效应[J]. 物理学报, 2001, 50(2): 299—303.

[7] 王继锁, 孙长勇. 压缩真空态下介观电路的量子涨落[J]. 物理学报, 1997, 46(10): 2007—2009.

[8] 王继锁, 韩保存, 孙长勇. 介观电容耦合电路的量子涨落[J]. 物理学报, 1998, 47(7): 1187—1191.

[9] 王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 平移压缩 Fock 态下介观电容耦合电路的量子涨落[J]. 物理学报, 2000, 49(11): 2271—2274.

[10] WANG X G, PAN S H. Quantum fluctuations of a mesoscopic RLC circuit in a displaced squeezed Fock state[J]. Chin Phys Lett, 2000, 17(3): 171—173.

[11] LI Y Q, CHEN B. Quantum theory of mesoscopic electrical circuits[J]. Phys Rev(B), 1996, 53(16): 4027—4032.

[12] 梁麦林, 袁兵. 介观含时电容耦合电路中压缩的产生极其在有限温度下的量子涨落[J]. 浙江大学学报, 2002, 29(1): 40—44.

[13] 徐秀玮, 柳盛典, 任廷琦, 等. 含时谐振子的演化算符和波函数[J]. 物理学报, 1999, 48(9): 1601—1603.

Quantum Fluctuations and Squeezing in the Coupling Part of the Inductive Coupled Electric Circuit

LIANG Mai-lin, YUAN Bing

(Department of Applied Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: An actual process for the inductive coupled electric circuit is studied and special attention is paid to the quantum fluctuations in the coupling part. Squeezing can be generated as the parameters of the circuit or inductances and capacitances change with time and time independent. Such kind of squeezing is completely produced by coupling.

Key words: inductive coupling; coupling part; quantum fluctuation; squeezing