

一类抛物型方程的能控性^{*}

陈 显 强

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了一类由抛物型偏微分方程描述的分布参数系统的能控性问题, 通过构造凸泛函, 用与 Sakawa 不同的方法, 得到了系统的全局近似能控性, 并进一步证明了系统具有有限维精确能控性, 改进了 Sakawa 已有的结果。

关键词: 分布参数系统; 抛物型方程; 近似能控性; 有限维精确能控性; 凸泛函

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 06-0001-03

1 问题的提出

设 Ω 是 r 维欧氏空间中一个有界连通开集, 其边界 $\partial\Omega$ 由有限块 $(r-1)$ 维具有 C^3 光滑性的曲面组成。

考虑线性抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t) - q(x)u(x, t) + \sum_{i=1}^n v_i(t)g_i(x), & (x, t) \in (0, T) \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \Omega, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \dots + \frac{\partial^2}{(\partial x_r)^2}$ 是拉普拉斯算子; $q(x)$ 和 $g_i(x)$ ($1 \leq i \leq n$) 是有界闭区域 $\Omega = \partial\Omega \cup \Omega$ 上的 Hödel 连续函数。 $v_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) 是控制变量, 它们在 $[0, T]$ 上 Hödel 连续。

根据文[1], 对每个初值 $u_0 = u_0(x) \in L^2(\Omega)$, 初边值问题(1) 存在惟一的经典解 $u(t) = u(x, t)$, $x \in \Omega, 0 < t < \infty, \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u_0(x)$, 在 $L^2(\Omega)$ 中。

设

$$D(A) = \{u; \Delta u \in L^2(\Omega), u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

$$A(u) = \Delta u - q(x)u, u \in D(A)$$

根据文[1], 存在 $\{\lambda_i, \phi_{ij}; j = 1, 2, \dots, m_i, i = 1, 2, \dots\}$ 使得

$$A\phi_{ij} = \lambda_i \phi_{ij}$$

$$\min_{x \in \Omega} q(x) \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i < \dots,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$$

$\{\phi_{ij}; j = 1, \dots, m_i, i = 1, 2, \dots\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 中完全标准正交基。其中, m_i 是正整数。

文[2] 在下列意义下研究了系统(1) 的能控性问题:

定义 1 设 $T > 0$, 如果对任给的 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $u_1 \in L^2(\Omega)$ 以及 $\epsilon > 0$, 存在相应的控制 $v = (v_1(t), \dots, v_n(t))$, 使得对应的系统(1) 的解 $u(t)$ 满足

$$\|u(T) - u_1\| < \epsilon$$

$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的范数。那么称系统(1) 是在时间 T 完全能控的(注: 现在的文献中称为全局近似能控的)。

文[2] 得到下列能控性定理。

定理 1 设 A 的特征值的重数 m_i 满足

$$m = \sup\{m_i\} < \infty$$

记

$$G_i = \begin{bmatrix} g_{i1}^1 & g_{i1}^2 & \dots & g_{i1}^{m_i} \\ g_{i1}^2 & g_{i1}^3 & \dots & g_{i1}^{m_i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i1}^n & g_{i1}^{n+1} & \dots & g_{i1}^{m_i+n} \end{bmatrix}$$
$$g_{ij}^k = (g_k, \phi_{ij})$$

$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积。那么系统(1) 为完全能控的充要条件是

$$n \geq m \text{ 且 } \text{rank } G_i = m_i, \forall i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

在文[3] 和文[4] 中, 下列系统

* 收稿日期: 2002-03-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871094); 广东省自然科学基金资助项目(990229)

作者简介: 陈显强(1962年生), 男, 博士, 副教授, E-mail: xqchen@gdntu.edu.cn

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + v(x, t) \chi_{\omega(t)}(x) & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

的能控制性问题得到研究, 其中, $\chi_{\omega(t)}$ 是 $\omega(t)$ 的特征函数, $\omega(t) (\subseteq \Omega)$ 是非空开子集. 文[3]提出了下列有限维精确能控的概念, 并指出其在实际控制问题中的重要性.

定义 2 设 E 是 $L^2(\Omega)$ 中任一有限维子空间, $T > 0$. 如果对任何 $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$, 存在相应的控制 v 使得系统(3) 对应的解 $u(t)$ 满足:

$$Pu(T) = Pu_1$$

其中, P 是从 $L^2(\Omega)$ 到 E 的正交投影算子, 那么称系统(2) 在时间 T 是有限维精确能控的.

本文在文[2] 中的相同条件下, 用新的文[3] 中的方法证明了系统(1) 是全局近似能控的和有限维精确能控的. 主要结果如下所述.

2 主要结果及其证明

定理 2 如果定理 1 中的条件(2) 成立, 那么系统(1) 对给定的 $L^2(\Omega)$ 的中任一有限维子空间 E 和 $T > 0$ 在时间 T 是全局近似能控和有限维精确能控的, 即对任何 $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$, 以及 $\epsilon > 0$, 存在相应的控制 v 使得系统(1) 对应的解 $u(t)$ 满足:

$$\|u(T) - u_1\| < \epsilon, Pu(T) = Pu_1$$

证明 首先, 考虑非受控系统

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(x, t) - q(x) \varphi(x, t) \\ \varphi(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

并考虑系统的输出为:

$$y = ((\varphi, g_1), (\varphi, g_2), \dots, (\varphi, g_n)) \quad (5)$$

根据文[5] 中的定理 1, (4) 和 (5) 在任何子区间 $t \in (T_1, T_2)$ 上是完全能观的, 即当

$$y(t) = 0, (T_1 < t < T_2) \text{ 时,}$$

$$\text{必有 } \varphi_0(x) = 0, x \in \Omega$$

其次, 定义一个与 ϵ, u_0 和 u_1 有关的泛函 $J: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ 如下:

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)^2 dt + \epsilon \|(I - P)\varphi_0\| - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx \quad (6)$$

其中, $\varphi(t)$ 是方程(4) 对应于初值 $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ 的解. $\epsilon > 0, 0 < T_1 < T_2 \leq T$, 根据方程(4) 关于解的

性质, 容易验证 J 是连续的且是严格凸的. 往下证明 J 是强制的:

当 $\|\varphi_0\| \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\liminf \frac{J(\varphi_0)}{\|\varphi_0\|} \geq \epsilon \quad (7)$$

设序列 $\{\varphi_0^j\}$ 满足 $\|\varphi_0^j\| \rightarrow \infty$, 记 $\varphi_0^j = \frac{\varphi_0^j}{\|\varphi_0^j\|}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{J(\varphi_0^j)}{\|\varphi_0^j\|} &= \frac{\|\varphi_0^j\|}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi_0^j(t), g_i)^2 dt + \\ &\epsilon \|(I - P)\varphi_0^j\| - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0^j dx + \int_{\Omega} \varphi_0^j(T) u_0 dx \end{aligned}$$

其中, $\varphi_0^j(t)$, 是方程(4) 对应于初值 $\varphi_0^j \in L^2(\Omega)$ 的解.

当 $\liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi_0^j(t), g_i)^2 dt > 0$ 时, 显然有

$$\liminf \frac{J(\varphi_0^j)}{\|\varphi_0^j\|} = \infty > \epsilon$$

当 $\liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi_0^j(t), g_i)^2 dt = 0$ 时, 不妨设在 $L^2(\Omega)$ 中有

$$\varphi_0^j \xrightarrow{w} \varphi_0$$

设 φ 是方程(4) 对应于初值 φ_0 的解. 根据方程(4) 解的性质, 有

$$\varphi_0^j \xrightarrow{w} \varphi \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中}$$

因此

$$(\varphi(t), g_i) = 0, i = 1, 2, \dots, T_1 < t < T_2$$

根据前面关于能观性的结果, 得

$$\varphi_0(x) = 0, x \in \Omega$$

所以

$$\varphi_0^j \xrightarrow{w} \varphi \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中}$$

又 E 是有限维子空间, 正交投影算子 P 是紧映射, 所以

$$P\varphi_0^j \rightarrow 0, \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中}$$

所以

$$\|(I - P)\varphi_0^j\| \rightarrow 1, \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_0^j)}{\|\varphi_0^j\|} \geq \epsilon$$

最后, 由泛函 J 的性质, 存在惟一的 $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, 使得

$$J(\varphi_0) = \inf\{J(\varphi_0); \varphi_0 \in L^2(\Omega)\}$$

设 φ 是方程(4) 对应于初值 φ_0 的解, 对任何 $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ 有

$$J\varphi_0 \leq J(\varphi_0 + \lambda\varphi_0)$$

代入(6) 式并注意解映射是线性的, 有:

$$0 \leq \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)^2 dt +$$

$$\lambda \left[\sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i) dt - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx \right] + \varepsilon \|\lambda\| \|(I-P)\varphi_0\|$$

当 $\lambda > 0$ 时, 上式两边除以 λ 之后, 再令 $\lambda \rightarrow 0$ 得:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)(\varphi(t), g_i) dt - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx + \varepsilon \|(I-P)\varphi_0\|$$

当 $\lambda < 0$ 时, 两边除以 λ 之后, 再令 $\lambda \rightarrow 0$ 得:

$$0 \geq \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)(\varphi(t), g_i) dt - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx - \varepsilon \|(I-P)\varphi_0\|$$

所以

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)(\varphi(t), g_i) dt - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx \right| \leq \varepsilon \|(I-P)\varphi_0\| \quad (8)$$

另一方面, 在方程 (1) 中取控制

$$v_i(t) = \begin{cases} (\varphi(T-t), g_i), & T-T_2 \leq t \leq T-T_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - qu + \sum_{i=1}^n v_i(t) g_i \quad (10)$$

(10) 式两边同时乘以 $\varphi(x, T-t)$ 得

$$\varphi(x, T-t) \frac{\partial u}{\partial t} = (\Delta u - qu) \varphi(x, T-t) +$$

$$\sum_{i=1}^n v_i(t) g_i(x) \varphi(x, T-t)$$

上式左边先对 t 再对 x 积分, 右边先对 x 再对 t 积分, 应用分部积分公式, Green 公式, 并注意到 φ 和 u 在边界 $\partial\Omega \times (0, T)$ 上等于 0, 有

$$\sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (\varphi(t), g_i)(\varphi(t), g_i) dt = \int_{\Omega} u(T) \varphi_0 dx - \int_{\Omega} \varphi(T) u_0 dx \quad (11)$$

由 (8) 和 (11) 式得

$$\left| \int_{\Omega} u(T) \varphi_0 dx - \int_{\Omega} u_1 \varphi_0 dx \right| \leq \varepsilon \|(I-P)\varphi_0\|$$

由 $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ 的任意性即得

$$\|u(T) - u_1\| \leq \varepsilon, Pu(T) = Pu_1$$

证完。

参考文献:

[1] ITO S. Fundamental solutions of parabolic equations and boundary value problems[J]. Japan J Math, 1957, 27: 55-102.
[2] SAKAWA Y. Controllability for partial differential equations of parabolic type[J]. Siam J Control, 1974, 12(3): 389-400.
[3] ZUAZUA E. Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation[J]. J Math Pures Appl, 1997, 76: 237-264.
[4] KHAPALOV A. Exact null controllability for the semilinear heat equation with superlinear term and mobile internal controls[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 43: 785-801.
[5] SAKAWA Y. Observability and related problems for partial differential equations of parabolic type[J]. Siam J Control, 1975, 13(1): 14-27.

Controllability for a Class of Partial Differential Equations of Parabolic Type

CHEN Xian qiang

(Department of Mathematics, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: This paper is devoted to the study of controllability for the distributed parameter systems described by partial differential equations of parabolic type. With different approach to Sakawa's, the approximate controllability for the distributed parameter systems is obtained by constructing convex function. And then, it is proved that the distributed parameter systems are finite dimensional exact controllable. Sakawa's existing result is improved.

Key words: distributed parameter system; parabolic equation; approximate controllability; finite dimensional exact controllability; convex function