

细分节点的样条插值及其二步算法^{*}

刘 斌¹, 关 亮², 关履泰¹

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275;

2. 广州电视台数据信息中心, 广东 广州 510010)

摘 要: 在讨论细分节点的样条插值基础上, 提出了在 B 样条曲线插值中如何利用前一次插值的结果进行曲线修改的问题, 最后得到一个二步算法。由于 B 样条有局部支撑性, 所以方法简单易行, 而且插值曲线有良好性质。

关键词: B 样条; 细分节点; 插值; 二步算法

中图分类号: TP911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 06-0011-04

关于一元样条函数的研究已经有了相当成熟的理论^[1], 并且广泛地应用于计算几何曲线造型中^[2]。一元 B 样条由于局部支撑性, 所以它对应的 B 样条曲线有一定的局部性质, 便于修改。但是还没有什么人详细地讨论在 B 样条曲线插值中能怎样尽量利用前一次插值的结果进行曲线的修改。在进行多元样条的研究中, 讨论在细分网格中的样条插值^[3,4], 其一元时候对应的情形正好是本文要讨论的样条插值, 即是考虑在给定一批节点进行了一次样条插值之后, 发现在某两节点间需要加插另一批节点进行细微刻划的问题。即: 在区间 $[a, b]$ 中

给定分划:

$$\pi_1: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b$$

在其中某相邻两点

$$x_i, x_{i+1}, i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$$

又有细分分划:

$$\pi_2: x_i = x_{i0} < x_{i1} < \cdots < x_{ik} < x_{i,k+1} = x_{i+1}$$

考虑插值问题 P_1 :

给出实数集 $\{y_j\}, j = 1, 2, \cdots, N$ 及 $\{y_{ij}\}, j = 1,$

$2, \cdots, k$, 求函数 $f(x)$, 满足:

$$f(x_j) = y_j, j = 1, 2, \cdots, N$$

$$f(x_{ij}) = y_{ij}, j = 1, 2, \cdots, k$$

本文讨论自然样条插值^[1,2], 给出求解方法并讨论可以看成对分划 π_1 先行插值再对分划 π_2 进行二次插值的二步法。

1 细分节点自然样条插值

问题 P_2 : 在问题 P_1 中, 要求函数 $f \in H^m[a, b]$, 且使函数: $J_m(f) = \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx$ 取最小。

此问题称为细分节点自然样条插值问题。其解称为细分节点插值自然样条函数。

把节点按照次序重新排列, 即令:

$$a = x_0 = t_0, x_1 = t_1, \cdots, x_i = t_i$$

$$x_{i,1} = t_{i+1}, \cdots, x_{i,k} = t_{i+k},$$

$$x_{i+1} = t_{i+k+1}, \cdots, x_N = t_{N+k}$$

$$b = x_{N+1} = t_{N+1+k}$$

得分划

$$\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N+k} < t_{N+1+k} = b$$

利用一元自然样条插值的结果, 易得

定理 1 细分节点自然样条插值问题的解可写成

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j + \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{(x-x_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} \frac{(x-x_{ij})_+^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

它在 $[a, x_1), (x_N, b]$ 中是 $m-1$ 次多项式, 在 $[x_i, x_{i+1}], j \neq i, j = 1, 2, \cdots, N-1$ 中是 $2m-1$ 次多项式, 在 $[x_{i,j}, x_{i,j+1}], j = 0, \cdots, k$ 中是 $2m-1$ 次多项式, 整体上 $f(x) \in C^{2m-2}[a, b]$ 。

证明 在分划 π 下问题 P_2 变成典型的一元自然样条插值问题 P_3 : 求函数 $f \in H^m[a, b]$, 满足插值条件 $f(t_j) = z_j, j = 1, \cdots, N+k$, 其中 $z_j = y_j$,

* 收稿日期: 2002-12-18

基金项目: 广东省自然科学基金重点资助项目 (036608); 香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

作者简介: 刘斌 (1976 年生), 男, 博士研究生; E-mail: lauandy@163.net

$j = 1, 2, \cdots, i, y_{i,j} = z_{i+j}, j = 0, \cdots, k, y_{i+j} = z_{i+k+j},$
 $j = 1, \cdots, N - i$ 。

且使泛函: $J_m(f) = \int_a^b (f^{(m)}(t))^2 dt$ 取极小,
根据一元自然样条的理论^[1,5], 其解可写成

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j t^j + \sum_{m=1}^{N+k} \gamma_j \frac{(t-t_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

它在 $[a, t_1], (t_{N+k}, b]$ 中是 $m-1$ 次多项式, 在 $[t_j,$
 $t_{j+1}], j = 1, 2, \cdots, N+k+1$ 中是 $2m-1$ 次多项式,
整体上 $f(x) \in C^{2m-2}[a, b]$ 。

注意到新旧分划 π 与 π_1, π_2 之间的关系, 得证
定理 1。而且还可以发现, 如果换用变量 x 代替参数
 t , 而把节点组 $\{t_j\}_{j=1}^{N+k}$ 换回 $\{x_j\}_{j=1}^N, \{x_{ij}\}_{j=1}^k$, 则表达
式的系数有关系:

$$\delta_j = \alpha_j, j = 0, \cdots, m-1$$

$$\gamma_j = \beta_j, j = 1, 2, \cdots, i$$

$$\beta_{ij} = \gamma_{i+j}, j = 1, \cdots, k$$

$$\beta_{i+j} = \gamma_{i+j+k}, j = 1, \cdots, N-i$$

采用类似一般 B 样条的定义, 具有节点 $x_j,$
 $x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}$ 的 m 阶 B 样条为:

$$B_j(x) = B_{j,m}(x) =$$

$$(x_{j+m} - x_j) [x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}] (\ominus x)_+^{m-1}$$

而具有节点 $x_{i,j}, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,j+m}$ 的 m 阶 B 样条为:

$$B_{ij}(x) = B_{i,j,m}(x) =$$

$$(x_{i,j+m} - x_{i,j}) [x_{i,j}, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,j+m}] (\ominus x)_+^{m-1}$$

在区间 $[a, b]$ 外, 补充的结点为:

$$x_{-2m+1} \leq x_{-2m+2} \leq \cdots \leq x_0 =$$

$$a < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b \leq x_{N+2} < \cdots < x_{N+2m}$$

而在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 外的结点有:

$$x_{i,-2m+l} = x_{i-2m+l}, l = 1, 2, \cdots, 2m$$

$$x_{i,k+l} = x_{i+l}, l = 1, 2, \cdots, 2m$$

又对于 $[a, b]$ 在上述的扩大分划下, 称函数

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j x^j + \sum_{j=1}^N \frac{(x-x_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$
$$\sum_{j=1}^k \beta_{ij} \frac{(x-x_{ij})_+^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

为定义在 $[a, b]$ 上相应于该分划的 $2m-1$ 次样条
函数, 这里 $\alpha_j, \beta_j, \beta_{ij}$ 均为常数。全体 $S(x)$ 组成一
线性空间, 记之为 $Sp(D^{2m-1}, \pi)$, 称为样条函数
空间。不难发现, 这正是用上述分划 π , 且作
 $x_{-m+l} = t_{-m+l}, l = 1, 2, \cdots, m-1$ 及 $x_{N+l} = t_{N+k+l},$
 $l = 2, \cdots, m$ 时的线性空间 $Sp(D^{2m-1}, \tilde{\pi}); \tilde{\pi}, \pi$ 为相
应分划的扩大分划, 因为在这种记号下可表示

$$s(t) = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j t^j + \sum_{j=1}^{N+k} \beta_j \frac{(t-t_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

它是普通意义下, 样条函数空间的元素。

定理 2 样条函数空间 $Sp(D^m, \pi)$ 的维数是
 $N+k+2m$ 。

证明 由于 $\{1, t, \cdots, t^{2m-1}, (t-t_1)_+^{2m-1}, \cdots, (t$
 $-t_{N+k})_+^{2m-1}\}, a \leq t \leq b$ 线性无关, 线性空间
 $Sp(D^{2m-1}, \tilde{\pi})$ 的维数是 $N+k+2m$ ^[5,9]。

根据上述分划 π 与 $\tilde{\pi}$ 的关系, 上述函数系即
 $\{1, x, \cdots, x^{2m-1}, (x-x_1)_+^{2m-1}, (x-x_2)_+^{2m-1}, \cdots,$
 $(x-x_N)_+^{2m-1}, (x-x_{i,1})_+^{2m-1},$
 $(x-x_{i,2})_+^{2m-1}, \cdots, (x-x_{i,k})_+^{2m-1}\}$

它们也线性相关, 线性空间 $Sp(D^{2m-1}, \pi)$ 的维数
是 $N+K+2m$ 。

定理 3 B 样条函数系 $\{B_{-2m+1}, B_{-2m+2}, \cdots, B_N,$
 $B_{i,1}, \cdots, B_{i,k}\}$ 构成 B 样条空间 $Sp(D^{2m-1}, \pi)$ 的基
底。

证明 由一元样条的性质, 函数系 $\{1, x, \cdots,$
 $x^{2m-1}, (x-x_1)_+^{2m-1}, \cdots, (x-x_N)_+^{2m-1}\}$ 与 $\{B_{-2m+1},$
 $B_{-2m+2}, \cdots, B_N\}$ 等价, $\{(x-x_{i,1})_+^{2m-1}, (x-x_{i,2})_+^{2m-1},$
 $\cdots, (x-x_{i,k})_+^{2m-1}\}$ 与 $\{B_{i,1}, \cdots, B_{i,k}\}$ 等价。组内函
数线性无关, 等价组函数可相互惟一线性表示。

从样条函数空间定义得知 $\{1, x, \cdots, x^{2m-1}, (x$
 $-x_1)_+^{2m-1}, \cdots, (x-x_N)_+^{2m-1}, (x-x_{i,1})_+^{2m-1}, \cdots, (x$
 $-x_{i,k})_+^{2m-1}\}$ 线性无关, 是 $Sp(D^{2m-1}, \pi)$ 的基底, 所
以 $B_{-2m+1}, B_{-2m+2}, \cdots, B_N, B_{i,1}, \cdots, B_{i,k}$ 也线性无关,
构成 $Sp(D^{2m-1}, \pi)$ 的基底。

2 二步法

从上节讨论, 可看到一元的细分节点插值自然
样条的一个侧面, 它可以变换成普通节点插值自然
样条, 当然问题也就化成一般的插值自然样条去解
决。但是, 如果真正进行了一次自然样条插值之
后, 觉得在某两个节点之间插值的结果不够满意,
需要加插一批节点, 进行进一步插值, 若希望能尽
量利用上一次插值的结果, 不想另起炉灶从头开
始, 怎么办?

定理 4 细分节点自然样条插值问题 P_2 的解
 $S(x)$ 满足边界条件:

$$S^{(a)}(a) = S^{(a)}(b) = 0,$$

$$\alpha = m, m+1, \cdots, 2m-2$$

证明 定理 1 的证明过程得出 $S(x)$ 是把节点
重新排列成分划 π 下的自然样条插值解。它在 $[a,$
 $x_1]$ 及 $[x_N, b]$ 中都是 $m-1$ 次多项式, 它满足是分划
 π 下自然样条插值解的边界条件:

$S^{(a)}(a) = S^{(a)}(b), \alpha = m, m+1, \cdots, 2m-1$
得证。

定理 5 细分节点自然样条插值问题的解 $S(x)$ 可以表示成

其系数 $\{\alpha_j\}_{j=-2m+1}^N$ 及 $\{\alpha_{\bar{j}}\}_{\bar{j}=1}^k$ 可以从下列线性代数方程组解出

$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j(x_l) \alpha_j + \sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}(x_l) \alpha_{\bar{j}} = y_l, \quad l = 1, 2, \dots, N$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j(x_{il}) \alpha_j + \sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}(x_{il}) \alpha_{\bar{j}} = y_{il},$$
$$l = 1, 2, \dots, k$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j^{(l)}(a) \alpha_j + \sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}^{(l)}(b) \alpha_{\bar{j}} = 0,$$
$$l = m, m+1, \dots, 2m-2$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j^{(l)}(b) \alpha_j + \sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}^{(l)}(a) \alpha_{\bar{j}} = 0,$$
$$l = m, m+1, \dots, 2m-2$$

证明 由定理 3 已经知道 $S(x)$ 可以写成本定理表达的形式。

线性方程组的前两组方程由插值条件得到, 后两组方程由定理 4 的自然样条插值边界条件得出。

这个定理虽然给出细分节点自然样条插值解的求法。但它并不能直接用到结点为分划 π_1 的自然样条插值结果。它给我们的启示:

如果在 x_{i0} 与 x_{i1} 中间, 在 $x_{i,k}$ 与 $x_{i,k+1}$ 中间加插 m_1 个结点, 细分分划 π_2 改成

$$\pi_3: x_i = x_{i,-m+1} < x_{i,-m+2} < \dots < x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,k} < x_{i,k+1} < \dots < x_{i,k+m-1} < x_{i,k+m} = x_{i+1}$$

沿用上述结果, 由定理 5 可知此时细分节点自然样条插值问题的解 $S(x)$ 为

$$S(x) = \sum_{j=-2m+1}^N \alpha_j \beta_j(x) + \sum_{\bar{j}=m+2}^{k+m-1} \alpha_{\bar{j}} \beta_{\bar{j}}(x)$$

由插值条件可以得出 $N+k$ 个方程, 由边界条件得出 $2m$ 个方程, 现在未知数个数为 $N+K+4m_2$, 多了 $2m_2$ 个自由度, 我们加插 $2m_2$ 个结点, 设有相应的插值条件, 我们不管在结点上函数取什么值, 插值结果只是在结点两边是 $2m_1$ 次多项式, 插值函数在整个区间 $[a, b]$ 是属于 C^{2m-2} 的。所以我们可以选取一种简单的情况: 解函数的系数满足

$$\alpha_{\bar{j}} = 0, \quad j = -m+2, \dots, 0$$

及 $j = k+1, \dots, k+m-1$

由于局部支撑性, 这时 $B_{\bar{j}}(x_l) = 0$ 对 $l, j = 1, 2, \dots, k$ 成立, 且

$$B_{\bar{j}}^{(l)}(a) = B_{\bar{j}}^{(l)}(b) = 0, \quad l = m, \dots, 2m-2$$

所以有:

定理 6 细分分划采用 π_3 的细分节点自然样条插值问题的解 $S(x)$ 可以表示成:

$$S(x) = \sum_{j=-2m+1}^N \alpha_j \beta_j(x) + \sum_{\bar{j}=1}^k \alpha_{\bar{j}} B_{\bar{j}}(x)$$

其系数 $\{\alpha_j\}_{j=-2m+1}^N$ 及 $\{\alpha_{\bar{j}}\}_{\bar{j}=1}^k$ 可以从下列线性代数方程组解出:

$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j(x_{il}) \alpha_j + \sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}(x_{il}) \alpha_{\bar{j}} = y_{il},$$
$$l = 1, 2, \dots, k \tag{1}$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j(x_l) \alpha_j = y_{il}, \quad l = 1, 2, \dots, k \tag{2}$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j^{(l)}(a) \alpha_j = 0,$$
$$l = m, m+1, \dots, 2m-2 \tag{3}$$
$$\sum_{j=-2m+1}^N B_j^{(l)}(b) \alpha_j = 0,$$
$$l = m, m+1, \dots, 2m-2 \tag{4}$$

注意在这种分划下, $B_{\bar{j}}(x)$ 与定理 5 的相同, 但 $B_{\bar{j}}(x)$ 在临界部分与定理 5 的是有差异的。其解也有些差异, 定理 5 中的解在 $(x_i, x_{i,1})$ 及 $(x_{i,k}, x_{i+1})$ 中是一个 $2m-1$ 次多项式。而定理 6 中的解是以 $x_{i,-2m+1}, \dots, x_{i,0}$ 及 $x_{i,k+1}, \dots, x_{i,k+m-1}$ 为结点的分段 $2m_1$ 次多项式, 但它们有同样的插值结果, 边界结果及光滑性 ($\in C^{2m-2}$), 而后者的解法很简单。

定理 7 采用 π_3 的细分节点自然插值样条解 $S(x)$ 的系数可以用二步法解出:

第一步: 先解线性代数方程组 (2) - (4), 求出系数 $\{\alpha_j\}_{j=-2m+1}^N$ 及

$$S_1(x) = \sum_{j=-2m+1}^N \alpha_j \beta_j(x)$$

第二步: 解线性代数方程组

$$\sum_{\bar{j}=1}^k B_{\bar{j}}(x_{il}) \alpha_{\bar{j}} = y_{il} - S_1(x_{il}),$$
$$l = 1, 2, \dots, k \tag{5}$$

求出系数 $\{\alpha_{\bar{j}}\}_{\bar{j}=1}^k$ 及

$$S_i(x) = \sum_{\bar{j}=1}^k \alpha_{\bar{j}} B_{\bar{j}}(x)$$

这样, $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$

证明 利用定理 6, (2) - (4) 正好是一个有 $N+2m$ 个未知数及 $N+2m$ 个方程的线性代数方程组, 而且由 B 样条的局部支撑性及 B 样条插值理论可知其解是存在的。而且当 $N \geq m$, 解就惟一, 方程组的系数矩阵是 $2m-1$ 对角阵。求出系数 $\{\alpha_j\}_{j=-2m+1}^N$, 即可确定 $S_1(x) = \sum_{j=-2m+1}^N \alpha_j \beta_j(x)$ 。

由定理 6 之 (1), 即得本定理 7 的 (5) 式, 它是 k 个未知数及 k 个方程组的线性代数方程组, 同样, 其解是存在的, 且当 $k \geq m$, 解就惟一。

定理 7 可得到求解细分节点自然样条插值样条解的二步法算法:

(1) 输入节点列 π_1 及细分节点列 π_3 , 样条阶数参数 m , 插值序列 $\{y_l\}$ 及 $\{y_{il}\}$;

列出并求解方程组 (2) — (4), 得出 $\{\alpha_j\}$ 及 $S_i(x)$ 。

(2) 求出 $\{S_1(x_{il})\}$ 。

列出并求出方程组 (5) 得出 $\{\alpha_{ij}\}$ 及 $S_2(x)$, $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ 为所求。

推论 细分节点自然样条插值问题 P_2 可以在原节点自然样条插值求出解 $S_1(x)$ 的基础上, 求出 $S_1(x)$ 在相应细分节点上的函数值后用方程 (5) 得出问题 P_2 的解。

参考文献:

[1] DeBOOR C. A practical guide to spline //REVISED ed. Applied mathematical sciences[M]. New York; Springer-Verlag, 2001: 27.

[2] FARIN G. Curves and Surfaces for CAGD-A Practical Guide [M]. Fifth edi. London; Academic Press, 2002.

[3] GUAN L T. Bivariate Polynomial Natural Spline Interpolation Algorithms with Local Basis for Scattered Data [J]. J Computational Analysis & Applications, 2003, 5 (1): 77—100.

[4] 关履泰, 刘斌. 加密网格点散乱数据的二元局部基插值样条函数[J]. 计算数学, 2003, 25(3): 375—384.

[5] 李岳生. 样条与插值[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

[6] 黄友谦. 曲线曲面的数值表示和逼近[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.

[7] 黄友谦, 李岳生. 数值逼近[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1987.

Splines Interpolation over Refined Knuts and Its Two step Algorithm

LIU Bin¹, GUAN Liang², GUAN Lu tai¹

(1. Department of Scientific Computation & Computer Application, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Guangzhou CATV Data Information Center, Guangzhou 510010, China)

Abstract: Based on the theory of B spline interpolation over refined knots, the problem about how to use the result of B-spline interpolation to modify the curve is discussed. At the end, the Two step algorithm is got. Because of the local support character of B spline, this algorithm has good properties and is very easy to put into practice.

Key words: B spline; refined grid; interpolation; two step algorithm