

一类电子商务网站竞争模型分析^{*}

李艳会, 朱思铭

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 针对电子商务网站“强者愈强”的马太效应的特点, 构建了电子商务网站竞争模型; 然后利用常微分方程的知识对二维的特殊情形进行了定性分析和仿真, 并用数值仿真分析了模型中的有关参数对系统的作用。然后针对分析结果讨论了影响网站发展的主导因素。

关键词: 电子商务网站; 竞争模型; 常微分方程; 定性分析

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 05-0006-05

以 Internet 为载体的网络信息带来了许多新的经济问题, 这主要是由于网络经济的特点: 边际成本几乎为零, 网络服务产品和消费之间呈现非排斥性; 网络的外部正效应。另外, 同传统产业相比, 网络经济中“规模效应”更为明显^[1]。文[2]揭示出网络经济的“正反馈循环”规律, 正如比尔·盖茨津津乐道的正螺旋效应, 即“好的越好, 而糟的越糟”, 导致“赢家通吃”。文[3, 4]调查显示网站的用户分布符合一个“赢家通吃”的法则, 呈现“幂律分布”。Maurer 和 Huberman 在文[5]中提出了网站动态竞争模型, 属于 Lotka Volterra 模型。但不同类型网站用户的分布不同, 这是由各类型网站的特点决定的^[6]。

提供电子交易的网站具有比其他网站更为突出的“强者更强”的特点。这是其服务性质决定的。假如一个交易网站只有一个用户, 那么这个网站是没意义的, 因为用户达不到与人交易的目的; 每增加一个用户, 网站就能多提供一个交易对象, 网站的效用就会因此增加。对最新增加的用户而言, 网站提供给他的效用高于任一原有用户加入时的效用; 同时, 新客户的加入也提高了原有用户的效用, 这就是网络外部正效应。网络外部正效应的存在使得用户多的网站更有吸引力, 这样就导致网络经济“强者愈强”的马太效应^[7]。因此电子商务网站之间的竞争模型同文[5]中的竞争模型应有所不同, 这就是本文中要讨论的问题。

本文首先对电子商务网站竞争进行分析建模, 然后分析两个实力相当的网站的竞争情况, 并进一步分析各参数对动态行为的影响, 最后分析结果的实际意义。

1 电子商务网站竞争模型

假定有 n 个网站提供相似服务, 竞争比网站数量多的一定量用户。设 x_i 是网站 i 的用户比率, 表示 i 网站的用户量在同类用户群中所占比率, 影响 x_i 的主要有 3 个部分: 无其他网站竞争时, x_i 以增长系数 α_i 增长, 最终达到其最大容量 β_i ; 当有其他网站竞争时, $x_i x_j$ 是同时使用网站 i 和 j 的用户比率, 由于网站 i 和网站 j 提供的服务相同, $\gamma_{ij} x_i x_j$ 表示由于 j 网站的影响, 而放弃 i 网站的用户比率, 同样有 $\gamma_{ji} x_i x_j$ 表示由于 i 的影响造成的 j 网站的用户的流失; 另外, 由于电子交易网站的特点, 用户会“偏好”选择用户量大的网站, 因此, $\gamma_{ij} \omega_{ij} (x_j - x_i) x_i x_j$, 就是 i, j 两个网站的共同用户的“偏好”对用户流失的影响, ω_{ij} 是影响程度, 同理有 $\gamma_{ji} \omega_{ji} (x_i - x_j) x_i x_j$, 相关的数学模型为

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i (\beta_i - x_i) - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} (1 + \omega_{ij} (x_j - x_i)) x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中, $\alpha_i > 0$, $1 > \beta_i > 0$, $0 < \omega_{ij} < \gamma_{ij}$ 。

模型 (1) 描述了多个电子商务网站之间竞争情况, 在此模型中有 2 个前提性条件: 一是供大于求, 由于网络经济的边际成本几乎为零, 并且网站建设只是在前期投入较大成本, 而以后增加的软、硬件成本

* 收稿日期: 2002-12-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10071097)

作者简介: 李艳会 (1972 年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 朱思铭; E-mail: Li_yanhui@hotmail.com

都相对较低, 因此供应商总能也愿意通过较少的投资来满足市场的需求; 二是网站总有办法吸引一定量的初始用户^[3]。两个条件毫无疑问都是可以达到的。

文[5]中的动态竞争模型:

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i (\beta_i - x_i) - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} x_i x_j \tag{2}$$

同模型(2) 相比, 模型(1) 增加了 $\omega_{ij}(x_j - x_i)$ 项, 体现电子商务网站的“强者更强” 的特性。

2 两个站点之间的竞争情况

对电子商务网站竞争模型 (1), 先分析两个相同网站的竞争情况, 此时 $\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_i, \omega = \omega_{ij}, \gamma = \gamma_{ij}, (i, j = 1, \cdots, n)$, 模型为

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 (\beta - x_1) - \gamma (1 + \omega (x_2 - x_1)) x_1 x_2, \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_2 (\beta - x_2) - \gamma (1 + \omega (x_1 - x_2)) x_1 x_2 \tag{3}$$

其中, $\alpha > 0, 1 > \beta > 0, 0 < \omega < \gamma, x_i \geq 0$ 。

因 $x_i \geq 0$, 只需考虑第 I 象限的情况。方程(3) 的奇点为 $A(0, 0)$ 、 $B(\beta, 0)$ 、 $C(0, \beta)$ 、 $D\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}\right)$ 、 $E(u, v)$ 、 $F(v, u)$, 其中:

$$u = \frac{1}{2\gamma\omega}(\alpha - \gamma + \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}), \quad v = \frac{1}{2\gamma\omega}(\alpha - \gamma - \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}) \tag{4}$$

当 $1 + \beta\omega < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, u, v 在第 I 象限。下面分析各奇点的稳定性。

$$J = \begin{pmatrix} \alpha\beta - 2\alpha x_1^0 - \gamma x_2^0(1 + \omega(x_2^0 - x_1^0)) + \gamma\omega x_1^0 x_2^0 & -\gamma x_1^0(1 + \omega(x_2^0 - x_1^0)) - \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \\ -\gamma x_2^0(1 + \omega(x_1^0 - x_2^0)) - \gamma\omega x_1^0 x_2^0 & \alpha\beta - 2\alpha x_2^0 - \gamma x_1^0(1 + \omega(x_1^0 - x_2^0)) + \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \end{pmatrix}$$

(x_1^0, x_2^0) 分别为 $A、B、C、D、E、F$ 。

对于 A 点, 其特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha\beta > 0$, 因此 A 为不稳定结点。

对于 $B、C$ 点, 其对应的特征值为 $\lambda_1 = -\alpha\beta, \lambda_2 = \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\omega\beta^2$ 。当 $\alpha/\gamma > (1 + \omega\beta)$ 时, $\lambda_2 > 0$; 当 $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < (1 + \omega\beta)$ 时, $\lambda_2 < 0$ 。

对于 D 点, 其对应的特征值为 $\lambda_1 = -\alpha\beta, \lambda_2 = \frac{\alpha\beta(-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega)}{(\alpha + \gamma)^2}$ 。因此, 当 $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, $\lambda_2 > 0$; 当 $\alpha/\gamma > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, $\lambda_2 < 0$ 。

对于 $E、F$, 其对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{2\gamma\omega} [4\alpha^3 + 4\gamma^3(1 + \beta\omega) - 4\alpha^2(\gamma + 3\beta\gamma\omega) + \alpha\gamma^2(-4 + 8\beta\omega + 9\beta^2\omega^2)]^{1/2}$$

只考虑在第 I 象限的情况, 因此当 $1 + \beta\omega < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 。

根据以上分析, 可得以下定理。

定理 1 系统 (3) (在第 I 象限中) 必有 3 个奇点 $A(0, 0)$ 、 $B(\beta, 0)$ 、 $C(0, \beta)$, 其中, A 为不稳定结点 (源)。此外

(1) $1 + \beta\omega < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, 系统尚有 3 个奇点 $D、E、F$, 其中 $B、C、D$ 为鞍点, $E、F$ 为稳定结点。

(2) $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < (1 + \omega\beta)$ 时, 系统尚有 1 个奇点 D , 其中 $B、C$ 为稳定结点, D 为鞍点。

(3) $\frac{\alpha}{\gamma} > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, 系统尚有 1 个奇点 D , 其中 $B、C$ 为鞍点, D 为稳定结点。

前面分析了系统(3) 在第 I 象限的奇点及其类型, 下面分析系统的全局渐近性态。

命题 1 系统(3) 中 $x_i (i = 1, 2)$ 有界。

证明 由(3) 式中各参数取值范围, 可得: $\frac{dx_i}{dt} \leq \alpha x_i (\beta - x_i) (i = 1, 2)$ 。因此, $\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \beta, (i =$

1, 2)。证毕。

因此, 仅需在 $0 \leq x_i \leq \beta \leq 1 (i = 1, 2)$ 的范围内研究。

系统在第 I 象限对应 4 条等倾线:

$l_3: x_1 = 0; l_4: x_2 = 0;$

$l_1: \alpha(\beta - x_1) - \gamma(1 + \omega(x_2 - x_1))x_2 = 0;$

$l_2: \alpha(\beta - x_2) - \gamma(1 + \omega(x_1 - x_2))x_1 = 0$

由 A 点为源, 可知, 第 I 象限中从原点到 $l_i (i = 1, 2)$ 的区域中, $\frac{dx_i}{dt} > 0$, 而在 l_i 上, $\frac{dx_i}{dt} = 0$, 在 l_i 到 $x_i = \beta$ 的区域中 $\frac{dx_i}{dt} < 0$ 。根据轨线走向, 有以下结论。

定理 2 系统(3) 在第 I 象限中的轨线图貌:

- (1) $1 + \beta\omega < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, 在第 I 象限内的轨线趋于 E 或 F 点, 视其初值 (x_1^0, x_2^0) 中 $x_1^0 > x_2^0 > 0$ 或 $0 < x_1^0 < x_2^0$ 而定。而当 $x_1^0 = 0$ 或 $x_2^0 = 0$ 时其轨线则趋于 C 或 B 点。当 $x_1^0 = x_2^0 > 0$ 时其轨线则趋于 D 点。
- (2) $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < 1 + \omega\beta$ 时, 在第 I 象限中的轨线趋于 B 或 C 点, 视其初值 (x_1^0, x_2^0) 中 $x_1^0 > x_2^0 \geq 0$ 或 $0 \leq x_1^0 < x_2^0$ 而定。而当 $x_1^0 = x_2^0 > 0$ 时其轨线则趋于 D 点。
- (3) $\frac{\alpha}{\gamma} > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 时, 在第 I 象限内的轨线均趋于 D 点。而当 $x_1^0 = 0$ 或 $x_2^0 = 0$ 时其轨线则趋于 C 或 B 点。

由定理 2 可得以下推论:

推论 在所有可能参数范围内, 系统 (3) 在第 I 象限不存在极限环。

本文用 MatLab 进行了模拟仿真, 系统的相图如图 1 所示。

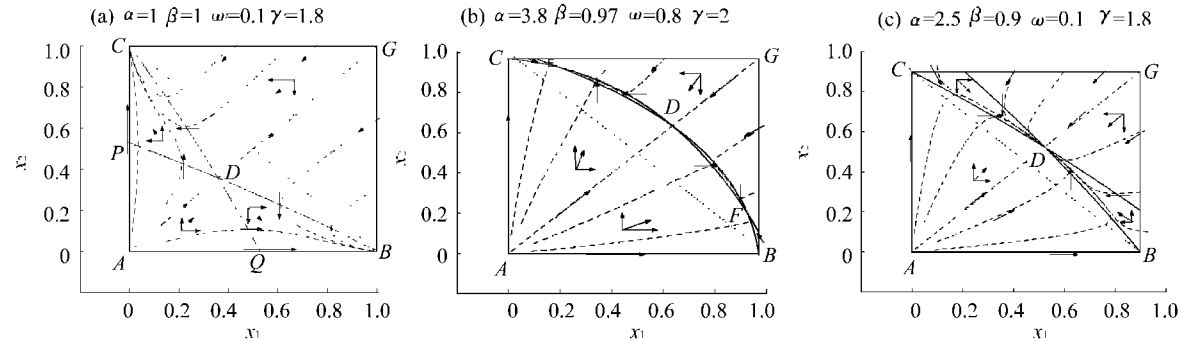


图 1 不同 $\frac{\alpha}{\gamma}$ 取值时的相图

Fig 1 Phase portraits of different $\frac{\alpha}{\gamma}$

- (a) when $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < 1 + \beta\omega$; (b) when $1 + \beta\omega \leq \frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$; (c) when $\frac{\alpha}{\gamma} > \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$

根据定理 2, 当两个实力相同网站竞争时结果为

- (1) 当 $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < 1 + \beta\omega$ 时, 网站竞争为强竞争, 结果只有一个网站生存, 其余网站绝灭。竞争开始时的用户量最大的网站得胜。出现“赢家通吃”的现象。
- (2) 当 $1 + \beta\omega \leq \frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$ 时, 竞争相对减弱, 网站共存, 但最终结果中各网站的用户比率同竞争开始时的用户量有很大关系, 基本保持初始各网站的比例。
- (3) 当 $\frac{\alpha}{\gamma} > \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$ 时, 自身的增长占据主导地位, 不论初始用户量多少, 各网站最终的用户

相同。

3 系统参数分析

首先分析相图上的一些特征：

(1) 用户可以同时访问 2 个网站，系统稳定时 2 个网站拥有的共同用户在所有用户中的比率也间接说明了竞争的激烈程度，当 2 个网站的共同用户多时说明竞争相对较为平缓。表现在相图中 $x_1 + x_2$ 的值。图中的 BC 直线即为 $x_1 + x_2 = 1$ ，如果稳定结点位于直线 BC 上方，即 $x_1 + x_2 > 1$ 说明共同用户多，竞争平缓。反之则说明竞争激烈；

(2) “赢家通吃”发生在竞争激烈的情况，由于网络经济的各种特性，这种现象更容易发生。

(3) 当竞争占主导地位时，初始用户比率起重要作用，初始用户率决定竞争结果；

当多个相同网站竞争时，我们可以猜测竞争情况大致也同定理 2 相似，可能有 3 种情况。为了验证猜测，用数值仿真的方法对 5 个网站的系统进行了分析，结果如图 2。

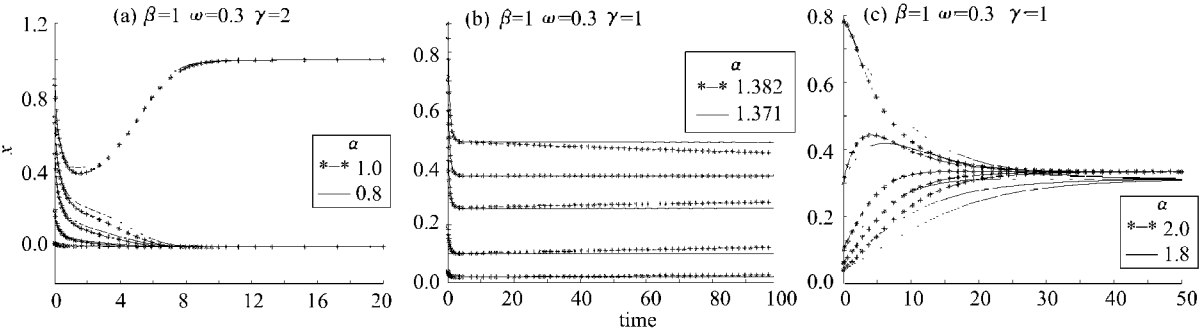


图 2 5 个网站的竞争情况， $\frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ 不同对各种情况下结果的影响

Fig 2 Competition among 5 sites, influence of different values of $\frac{\alpha_i}{\gamma_i}$

(a) When $0 < \frac{\alpha}{\gamma} < 1 + \beta\omega$;

(b) when $1 + \beta\omega \leq \frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$;

(c) when $\frac{\alpha}{\gamma} > \beta\omega + \sqrt{1 + \beta^2\omega^2}$

下面讨论参数对系统的影响。

(1) 模型中的 β_i 是网站自身的限制。由于网站投资主要在初期，后期的追加资本小，因此，各网站的软硬件升级容易，自身限制一般可以避免。 ω 是用户“偏好选择”强度，由用户决定，一般同类网站相同；因而系统的主要参数是增长系数 α_i 和竞争系数 γ_i 。 α_i/γ_i 是增长同竞争的比值，不同范围有不同的结果，如前面定理 2 的讨论。 α_i/γ_i 影响系统的稳定速度， α_i/γ_i 越大，稳定速度越快。另外竞争结果在用户共存时， α_i/γ_i 的值决定各网站最后的用户比率， α_i/γ_i 越大，最后拥有的用户越多。如图 2 所示。

(2) β_i 对系统的影响： β_i 对网站自身增长有影响， β_i 越小，系统受自身资源限制大，在稳定状态时拥有的用户少，当竞争结果是各网站共存时，用户比率随 β_i 的减小而减少。当只有一个网站生存时， β_i 仅对生存下来的网站有影响。如图 3(a)、(b)。

(3) ω 不同取值的影响： ω 的不同值是系统的“强者更强”法则的体现，对系统的稳定速度有影响。随着 ω 的增大，在系统发展过程中，对于用户少的网站，用户减少时减少速度更快，增加时增加速度变慢。反之，对于用户多的网站，用户增加时速度加快，减少时速度变慢。如图 3(c)、(d) 所示。当 $\omega = 0$ 时，即为(2)式模型的情况。如图 3(c)、(d)虚线所示。

4 结论及下一步工作

总之，对于实力相当的网站的竞争，当竞争较强时，初始用户的比率决定网站的最终命运，而初始访问量的提高在于网站的宣传、链接的便捷程度等；一般来说，初始访问量和自身增长率同网站的响应速度、页面的友好程度、查询服务的便捷程度、服务资料的数量等有关。网站必须通过提高自身的服务质量来增强自身增长率。对于多个网站竞争时，情况同两个网站时相似，但更为激烈，系统的渐近性态也更为

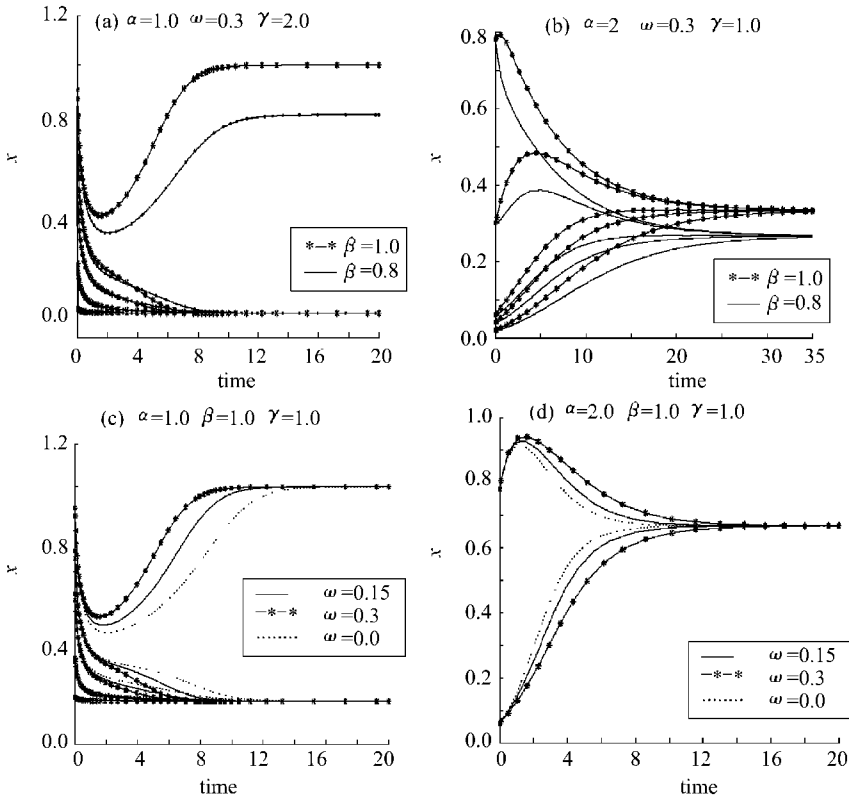


图 3 (a)、(b) 为 β_i 对系统的影响 (c)、(d) 为不同 ω 对系统的影响

Fig 3 (a), (b): Results of different values of β_i ; (c), (d): Results of different values of ω

复杂。本文主要分析网站竞争情况，在实际中各网站之间可能存在合作，这些策略会影响系统的发展。鉴于篇幅，多个网站的竞争分析及合作策略以后讨论。

参考文献:

[1] 陈守明. 网络经济中的“赢家通吃”现象与企业对策[J]. 外国经济与管理, 1999(11): 27— 29.
[2] 贲金锋, 郑维敏. 市场经济中的正反馈机制研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997(6): 1— 6.
[3] ADAMIC L A, HUBERMAN B A. The nature of markets in the world wide web[J]. J Elec Comm, 2000(1): 5— 12.
[4] HUBERMAN B A, ADAMIC L A. Evolutionary dynamics of the world wide web[J]. Nature, 1999, 401: 131.
[5] MAURER S M, HUBERMAN B A. Competitive dynamics of web sites[J]. J Economic Dynamics and Control, 2003(27): 2195— 2206.
[6] PENNOCK D M, FLAKE G W, LAWRENCE S. Winners don't take all: Characterizing the competition for links on the web[J]. Proceedings of the National Academy of Science, 2002(4): 5207— 5211.
[7] 任红波, 李鑫. 网络产业竞争特性分析[J]. 经济论坛, 2001(12): 37— 39.
[8] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

Analysis of a Type of Competition Model of E-commerce Sites

LI Yan hui, ZHU Si ming

(School of Mathematics and Computation Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A mathematical model of competing e-commerce web sites is presented, adequately considering the property of “better for better”. The model of special state is qualitatively analyzed when “ $n=2$ ”. The parameters’ influence on the system is also studied by numerical simulating. Based on these results, the dominant system parameters are investigated.

Key words: e-commerce web sites; competition model; ordinary differential equation; qualitative analysis