

竞渡方向的优化模型^{*}

吴 红, 王远世

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究参加长江竞渡的游泳者对游泳方向的最优选择问题。在游泳者速度大小不变的前提下, 针对 2002 年比赛期间的水流分布给出了新颖的游泳者竞渡策略以及有趣的最佳游泳路线。对水流速度为一般连续分布的情形, 采用多段折线逼近法, 给出通用的模型及其求解步骤, 并论证了该方法在实际应用中的可操作性。

关键词: 流速; 数学模型; 最优化

中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) S1-0001-03

1 问题的引入

2002 年 5 月 1 日, “武汉抢渡长江挑战赛”在江城隆重举行, 参赛的国内外选手共 186 人。虽然选手中专业人员将近一半, 但仅 34 人到达终点^[1]。与此形成鲜明对比的是, 于 1934 年 9 月 9 日在武汉首次举办的竞渡长江游泳比赛, 参赛的 44 人中, 却有 40 人到达终点^[1]。究其原因, 关键在于游泳者能否根据自己的速度, 合理地选择游泳方向。

1934 年的比赛起点为武昌汉阳门码头, 终点设在汉口三北码头, 全程约 5 000 m。2002 年的比赛起点为武昌汉阳门码头, 终点设在汉阳南岸咀, 从武昌汉阳门的正对岸到汉阳南岸咀的距离为 1 000 m, 如图 1 所示。

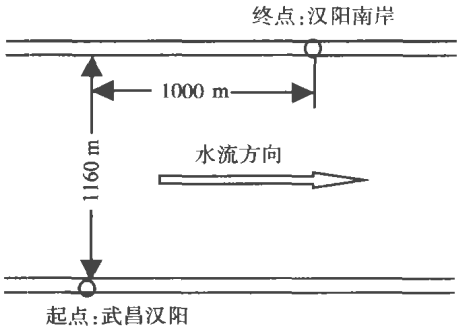


图 1 渡江示意图

Fig. 1 Swimming tours

假定竞渡区域两岸为平行直线。它们之间的垂直距离, 即江面宽度为 1 160 m。假定在竞渡过程中游泳者的速度大小 $|v|$ 不变。2002 年比赛期间水

流速度沿离岸边距离为连续分布:

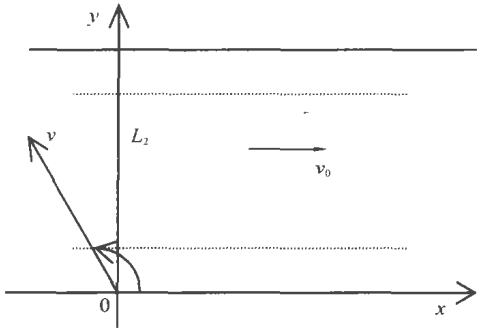


图 2 渡江路径简化图

Fig. 2 Simplified swimming tours

$$v_0(y) = \begin{cases} \frac{2.28}{200}y, & 0 \leq y \leq 200 \\ 2.28, & 200 < y < 960 \\ \frac{2.28}{200}(1160 - y), & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

我们关心的的问题是, 若某游泳者的速度大小全程保持不变: $|v| = 1.5 \text{ m/s}$, 试为他选择游泳方向和路线, 并估计他的成绩; 对一般的水流速度分布情形, 如何处理类似问题。

2 模型建立与求解

设比赛出发点为原点, 从上游到下游的河岸方向为 x 轴正向, 从武昌汉阳门垂直向上为 y 轴正向。故游泳者的速度可分解为 x 轴、 y 轴两个方向的速度。一方面, 游泳者沿 x 轴方向要游完距离 $L_1 = 1 000 \text{ m}$, 沿 y 轴方向要游完距离 $L_2 = 1 160 \text{ m}$,

^{*} 收稿日期: 2003-09-29

基金项目: 中山大学教学改革研究资助项目 (34000-1163102)

作者简介: 吴红 (1966 年生), 女, 副研究员; E-mail: zsuwh@163.com

另一方面, 要通过选择游泳方向, 使比赛成绩最佳。因此, 这是一个在一定条件下求最小值的问题, 即条件极值问题^[2], 解决的方法主要有拉格朗日乘数法等。

记游泳者游完全程所需时间为 T , 游泳者的方向与 x 轴正向的夹角为 α , 于是, 游泳者速度为 $v = (|v| \cos \alpha, |v| \sin \alpha)$ 。记 L_{21} 为区间 $0 \leq y \leq 200$ m 的长度, v_0^1 为其内水流的速度, α_1 为其内游泳者的角度, L_{11} 表示当游泳者沿 y 轴游完 L_{21} 段时, 沿 x 轴方向所游的位移。类似地, 在区间 $200 < y < 960$ m 可相应定义 L_{22} ; v_0^2, α_2, L_{12} ; 在区间 $960 \leq y \leq 1\,160$ m 可相应定义 $L_{23}, v_0^3, \alpha_3, L_{13}$, 如图 2 所示。由题设, 有 $L_{21} = L_{23} = 200$ m, $L_{22} = 760$ m, $|v| = 1.5$ m/s。

在 L_{21} 段, 游泳者沿 y 轴正向游完 L_{21} 段的时间

$$T_1 = \frac{L_{21}}{|v| \sin \alpha_1}, \text{ 此时其沿 } x \text{ 轴正向所游位移 } L_{11} = \int_0^{T_1} (|v| \cos \alpha_1 + v_0^1) dt. \text{ 因 } \frac{dy}{dt} = |v| \sin \alpha_1, \text{ 故 } dt = \frac{dy}{|v| \sin \alpha_1}, \text{ 即有}$$

$$L_{11} = \int_0^{L_{21}} \left(\cot \alpha_1 + \frac{v_0^1}{|v| \sin \alpha_1} \right) dy$$

类似地, 有:

$$T_2 = \frac{L_{22}}{|v| \sin \alpha_2},$$

$$L_{12} = \int_{L_{21}}^{L_{21}+L_{22}} \left(\cot \alpha_2 + \frac{v_0^2}{|v| \sin \alpha_2} \right) dy,$$

$$T_3 = \frac{L_{23}}{|v| \sin \alpha_3},$$

$$L_{13} = \int_{L_{21}+L_{22}}^{L_1} \left(\cot \alpha_3 + \frac{v_0^3}{|v| \sin \alpha_3} \right) dy$$

其中, T_2, T_3 分别为游泳者沿 y 轴正向游完 L_{22}, L_{23} 段所用的时间。若游泳者成功到达终点, 必有 $L_1 = L_{11} + L_{12} + L_{13}$, 即

$$L_1 = \int_0^{L_{21}} \left(\cot \alpha_1 + \frac{v_0^1}{|v| \sin \alpha_1} \right) dy + \int_{L_{21}}^{L_{21}+L_{22}} \left(\cot \alpha_2 + \frac{v_0^2}{|v| \sin \alpha_2} \right) dy + \int_{L_{21}+L_{22}}^{L_1} \left(\cot \alpha_3 + \frac{v_0^3}{|v| \sin \alpha_3} \right) dy \quad (1)$$

而游泳者到达终点的时间 $T = T_1 + T_2 + T_3$, 即

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{L_{2i}}{|v| \sin \alpha_i} \quad (2)$$

于是问题转化为在等式 (1) 成立的条件下, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的值, 使 T 最小。

$$\text{令 } |v| = 1.5 \text{ m/s}, v_0^1 = \frac{2.28y}{200}, v_0^2 = 2.28, v_0^3 =$$

$\frac{2.28(1160-y)}{200}$, 再由 L_{21}, L_{23} 段水流速度的对称性,

知必有 $\alpha_1 = \alpha_3$, 故 (1)、(2) 式依次变为

$$1000 = 400 \cot \alpha_1 + \frac{200 \times 2}{1.5 \sin \alpha_1} + \left(\cot \alpha_2 + \frac{2.28}{1.5 \sin \alpha_2} \right) \times 760 \quad (3)$$

$$T = T(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{228 \times 2}{1.5 \sin \alpha_1} + \frac{760}{1.5 \sin \alpha_2} \quad (4)$$

在 (3) 式两边对 α_1 求导, 有

$$\frac{400 + 304 \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1} + \frac{760(1 + 1.52 \cos \alpha_2)}{\sin \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0 \quad (5)$$

又由极小值性质, 有 $\frac{dT}{d\alpha_1} = 0$ 。由 (4) 式有:

$$\frac{400 \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1} + \frac{760 \cos \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \times \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1} - 0.76$$

令 $u = \cos \alpha_1, w = \cos \alpha_2, c = 0.76$, 则式 (3)

变为

$$1000 = \frac{400 \times 1.5u + 2.28 \times 2}{1.5 \sqrt{1-u^2}} + 760 \times \frac{1.5u + 2.28(1-cu)}{1.5 \sqrt{(1-cu)^2 - u^2}} \quad (7)$$

有 $u = -0.6068$, 故 $\alpha_1 = \alpha_3 = 127.362^\circ$; $w = -0.4153$, 故 $\alpha_2 = 114.539^\circ$, 且 $T = 892.48$ s。

因此, 当游泳者在全程保持速度大小为 1.5 m/s 不变时, 在 L_{21} 段应选择角度 $\alpha_1 = 127.362^\circ$; 在 L_{22} 段应选择角度 $\alpha_2 = 114.539^\circ$; 在 L_{23} 段应选择角度 $\alpha_3 = 127.362^\circ$, 估计成绩为 $T = 892.48$ s。游泳者的游泳路线可用 MatLab 画出, 如图 3 所示。

关于一般情形的水流速度分布问题, 可以用有限段折线来逼近, 如图 4 中虚线所示。假定在宽 1 160 m 的江面上设置了 $m+1$ 个观测点: $0 \text{ m} = c_0 < c_1 < \dots < c_m = 1\,160$ m, 记各观测点的流速为 $f(c_i)$, 易见 $f(c_0) = f(c_m) = 0$ 。故流速的折线方程为

$$v_0 = v_0(y) = a_i y + b_i, c_{i-1} \leq y \leq c_i, 1 \leq i \leq m$$

其中, $a_i = \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}}, b_i = f(c_i) - a_i c_i$ 。

设游泳者在 $c_{i-1} \leq y \leq c_i$ 段选择角度 α_i 不变, 则其沿 y 轴正向游完该段的时间为 $T_i =$

$\frac{c_i - c_{i-1}}{|v| \sin \alpha_i}$ 。此时, 其沿 x 轴正向所游位移为

$$L_i = \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left(\cot \alpha_i + \frac{v_0^i}{|v| \sin \alpha_i} \right) dy$$

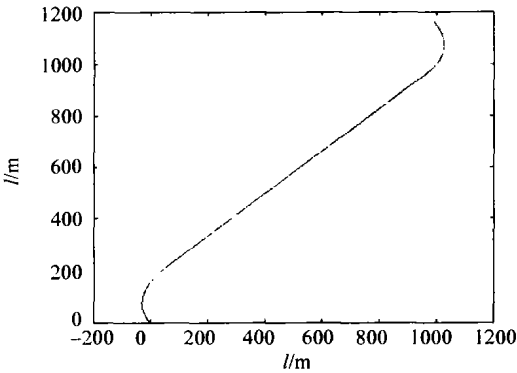


图3 最佳游泳路线图
Fig 3 The optimal tour

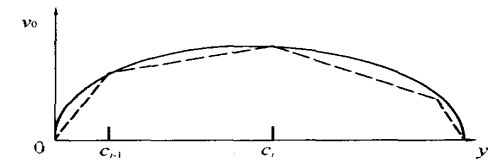


图4 一般情形的流速分布
Fig 4 The distribution of water speeds

于是, 当游泳者到达终点时, 必有 $L_1 = \sum_{i=1}^m L_{li}$, 即

$$L_1 = \sum_{i=1}^m \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left(\cot \alpha_i + \frac{v_0^i}{|v| \sin \alpha_i} \right) dy \tag{8}$$

而游泳者所花时间 $T = \sum_{i=1}^m T_i$, 即

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{c_i - c_{i-1}}{|v| \sin \alpha_i} \tag{9}$$

因此, 问题转化为在等式 (8) 成立的条件下, 求 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 使 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 最小。为此, 引入拉格朗日函数

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \lambda) = T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + \lambda \left[L_1 - \sum_{i=1}^m \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left(\cot \alpha_i + \frac{v_0^i}{|v| \sin \alpha_i} \right) dy \right]$$

然后求解方程组

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

即可从中求得 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 使 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 最小。

参考文献:

[1] 数学建模[EB/OL]. [http: //www. hep. edu. cn](http://www.hep.edu.cn), 2003— 09.
[2] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

Optimization of Swimming Direction in Crossing the Yangtze River

WU Hong, WANG Yuan shi

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The optimization of swimming direction in the contest of crossing the Yangtze river is studied. Under the condition that a swimmer has the same speed in size, a new strategy is given and a novel swimming route for the swimmer to win in 2002 is shown. For the general case that the velocity of river is continuous, a normal method to deduce the optimization of swimming direction by fold lines is discussed.
Key words: velocity of flow; mathematical model; optimization