

一类奇摄动非线性方程的激波解^{*}

周康荣

(湖州师范学院理学院, 浙江湖州 313000)

摘要: 研究了一类非线性微分方程奇摄动边值问题的激波解。首先利用直接展开法构造问题的外部解, 其次利用伸展变量构造内层解, 最后利用匹配原理得到了原问题在不同位置的激波解。

关键词: 非线性; 奇摄动; 激波解

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) S1-0006-03

非线性奇摄动问题是国际学术界十分活跃的研究对象^[1]。近几年来发展和优化了许多近似方法, 包括平均法, 边界层法, 匹配渐近展开法, 多重尺度法。近来许多学者做了大量的工作。例如, O'Malley^[2], Butuzov等^[3], Kelley^[4], Mixoguchi等^[5], 等。本文将利用匹配方法研究一类奇摄动非线性问题的激波解。

考虑边值问题。

$$\epsilon y'' + yy' - y \sin x = 0, x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta \quad (2)$$

其中, ϵ 为正的小参数, α, β 为常数。

由于小参数 ϵ 与最高阶导数相乘, 所以预计有激波层, 其位置取决于 y' 的系数 y 的符号, 而 y 的值又是边界值 α 和 β 的函数。所以边界层的位置取决于 α 和 β 的值。

1 外层解

寻找形式为

$$y^0 = y_0(x) + y_1(x)\epsilon \dots$$

的外层解, 代入 (1) 和 (2) 得到

$$y_0 \frac{dy^0}{dx} - y_0 \sin x = 0 \quad (3)$$

$$y_0(0) = \alpha, y_0(1) = \beta \quad (4)$$

方程 (3) 为外层解提供了两个分支

$$y_0 = 0$$

和

$$y_0 = -\cos x + c_0$$

其中, c_0 为常数。因为第一个分支不能满足边界条件, 所以必须丢弃。第二个分支产生两个零次外部解

$$y_0^1 = -\cos x + \alpha + 1$$

$$\text{和} \quad y_0^r = -\cos x + \beta + \cos 1$$

其中, y_0^1 满足 (4) 的左边界条件, 而 y_0^r 满足 (4) 的右边界条件。

由 (2) 得到

$$y_0^1(1) = -\cos 1 + \alpha + 1$$

$$\text{和} \quad y_0^r(0) = -1 + \beta + \cos 1$$

因此, 如果 $\alpha \neq \beta - 1 + \cos 1$, 那么 y_0^r 在 $x = 0$ 附近无效, 而 y_0^1 在 $x = 1$ 附近无效, 所以需引进一个激波层。如果激波层在左端, 那么丢弃 y_0^1 ; 如果激波层在右端, 那么丢弃 y_0^r ; 如果激波层在区间内部, 则 y_0^r 和 y_0^1 都需要。

$$\text{如果} \quad \alpha = \beta - 1 + \cos 1$$

那么 $y^0 = -\cos x + \beta + \cos 1 + O(\epsilon)$ 为边值问题 (1) - (2) 的激波解。

2 内层解

当 $\alpha \neq \beta - 1 + \cos 1$ 时, 激波层出现在 $[0, 1]$ 的某处。为研究在边界层中解的性态, 我们引入伸展变量

$$\xi = \frac{x - x_b}{\epsilon^\lambda} \text{ 或 } x = x_b + \epsilon^\lambda \xi (\lambda > 0)$$

其中, x_b 是边界层所在的位置, 采用伸展了的变量, (1) 式变成

$$\epsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \epsilon^{-\lambda} y^i \frac{dy^i}{d\xi} - y^i \sin(x_b + \epsilon^\lambda \xi) = 0$$

其特异极限为

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + y^i \frac{dy^i}{d\xi} = 0$$

它对应于 $\lambda = 1$, 这时 y^i 的零次近似 y_0^i 应满足方程

* 收稿日期: 2004-01-06

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (102009)

作者简介: 周康荣 (1957年生), 男, 讲师; E-mail: zkrong@huc.zj.cn

$$\frac{d^2 y_0^i}{d\xi^2} + y_0^i \frac{dy_0^i}{d\xi} = 0 \quad (5)$$

由(5)式可得

$$\frac{d^2 y_0^i}{d\xi^2} = \frac{1}{2} k [c_1 - (y_0^i)^2] \quad (6)$$

其中, c_1 是积分常数。显然, $c_1 = k^2 > 0$, 否则 $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} y_0^i = \pm\infty$ 使得 y_0^i 不能与外展开式匹配。由(6)可得

$$y_0^i = k \tanh\left[\frac{1}{2} k (\xi + c_2)\right], \quad (y_0^i)^2 \leq k^2$$

和

$$y_0^i = k \coth\left[\frac{1}{2} k (\xi + c_2)\right], \quad (y_0^i)^2 \geq k^2$$

其中, c_2 是积分常数。

注意到 $\tanh$ 和 $\coth$ 都是奇函数, 所以 k 可取成正的。常数 k 和 c_2 需要在匹配内层解和外部解的过程中确定。考虑 3 种可能的激波层的位置: 在区间左端, 右端和一个内点处。

3 匹配

3.1 激波层在区间 $[0, 1]$ 的左端, 即 $x_b = 0$

外展开式由 y_0^r 给定。将 y_0^r 用 ξ 表示并对小的 ϵ 展开得

$$(y_0^r)^i = [-\cos \epsilon \xi + \beta + \cos 1]^i = \beta + \cos 1 - 1$$

将 y_0^i 用 x 表示并对小的 ϵ 展开得

$$(y_0^i)^0 = k$$

由于要求 $(y_0^r)^i = (y_0^i)^0$, 故 $k = -1 + \beta + \cos 1$, 所以

$$y_0^i = (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right]$$

$$(y_0^i)^2 \leq k^2$$

$$y_0^i = (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right]$$

$$(y_0^i)^2 \geq k^2$$

因为假定激波层在 $x = 0$ 处, $x = 0$ 对应于 $\xi = 0$, y_0^i 必须满足 $y_0^i(0) = \alpha$, 所以

$$\alpha = (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)c_2\right] \quad (7)$$

或

$$\alpha = (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)c_2\right] \quad (8)$$

由 $\tanh$ 函数和 $\coth$ 函数的性质可知, 如果 $\alpha > \beta +$

$\cos 1 - 1$, 内解由 $\coth$ 函数给出, 它从 α 降到 $\beta + \cos 1 - 1$ 。如果 $\alpha < \beta + \cos 1 - 1$, 那么它必须大于 $-(\beta + \cos 1 - 1)$, 这时内解由函数给出, 从 α 增到 $\beta + \cos 1 - 1$ 。

由奇摄动问题的复合解的构造知:

当 $\alpha > \beta + \cos 1 - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = 1 - \cos x + (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, c_2 常数由(8)式确定。

当 $\alpha < \beta + \cos 1 - 1, \beta + \cos 1 - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = 1 - \cos x + (\beta + \cos 1 - 1) \circ$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, 常数 c_2 由(7)式确定。

3.2 激波层在区间 $[0, 1]$ 的右端, 即 $x_b = 1$

外层解由 y_0^l 给出。将 y_0^l 用 $\xi = \frac{x-1}{\epsilon}$ 表示, 同理

可得

当 $\beta < \alpha + 1 - \cos 1 < 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = \cos 1 - \cos x + (\cos 1 - \alpha - 1) \circ$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\cos 1 - \alpha - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon) \quad (9)$$

其中, c_2 为常数。

当 $\beta > \cos 1 - \alpha - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = \cos 1 - \cos x + (\cos 1 - \alpha - 1) \circ$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\cos 1 - \alpha - 1)(\xi + c_2)\right] \quad (10)$$

其 c_2 中为常数。

3.3 激波层在区间 $[0, 1]$ 的某内点处,

即 $x_b \in (0, 1)$

用类似的方法可以得到: 当 α 和 β 满足

$$0 < \arccos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \cos 1 + 1) < 1$$

和

$$\beta + \cos 1 - \alpha - 1 > 0$$

时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = -2\cos x + \alpha + \beta - 1 + \cos 1 +$$

$$\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - \alpha - 1) \circ$$

$$\tanh\left[\frac{1}{4}(\beta + \cos 1 - \alpha - 1)\xi\right]$$

4 结 论

现将上述的讨论综合为如下结论:

(I) 当 $\alpha = \beta + \cos 1 - 1$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^0 = -\cos x + \beta + \cos 1 + O(\epsilon)$$

此时无激波层;

(II) 当 $\alpha > \beta + \cos 1 - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = 1 - \cos x + (\beta + \cos 1 - 1) \cdot$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, 常数 c_2 由(8) 确定, 此时激波层在区间 $[0, 1]$ 的左端点 $x = 0$ 处;

(III) 当 $\alpha < \beta + \cos 1 - 1, \beta + \cos 1 - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = 1 - \cos x + (\beta + \cos 1 - 1) \cdot$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, 常数 c_2 由(7) 确定, 此时激波层在区间 $[0, 1]$ 的左端点 $x = 0$ 处;

(IV) 当 $\beta < \alpha + 1 - \cos 1 < 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = \cos 1 - \cos x + (\cos 1 - \alpha - 1) \cdot$$

$$\coth\left[\frac{1}{2}(\cos 1 - \alpha - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, 常数 c_2 由匹配过程确定。此时激波层在区间 $[0, 1]$ 的右端点 $x = 1$ 处;

(V) 当 $\beta > \cos 1 - \alpha - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 的激波解为

$$y^c = \cos 1 - \cos x + (\cos 1 - \alpha - 1) \cdot$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}(\cos 1 - \alpha - 1)(\xi + c_2)\right] + O(\epsilon)$$

其中, 常数 c_2 由匹配过程确定。此时激波层在区间 $[0, 1]$ 的右端点 $x = 1$ 处;

$$(VI) \text{ 当 } 0 < \arccos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \cos 1 + 1) < 1,$$

$\beta + \cos 1 - \alpha - 1 > 0$ 时, 边值问题(1) - (2) 激波解为

$$y^c = -2\cos x + \alpha + \beta - 1 + \cos 1 +$$

$$\frac{1}{2}(\beta + \cos 1 - \alpha - 1) \cdot$$

$$\tanh\left[\frac{1}{4}(\beta + \cos 1 - \alpha - 1)\xi\right] + O(\epsilon)$$

此时激波层在区间 $[0, 1]$ 的内点 $x_b = \arccos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \cos 1 + 1)$ 。

参考文献:

- [1] De JAGER E M, JIANG F R. Theory of singular perturbation [M]. Amsterdam: North-Holland Pub, 1996.
- [2] O'MALLEY Jr R E. On the asymptotic solution of the singularly perturbed boundary value problems posed by Boh [J]. J Math Appl, 2000, 242: 18-38.
- [3] BUTUZOV V F, NEFEDOV N N, SCHNEIDER K R. Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange of stabilities [J]. J Differential Equations, 2001, 169: 373-395.
- [4] KELLEY W G. A singular perturbation problem of carrier and pearson [J]. J Math Anal Appl, 2001, 255: 678-697.
- [5] MIZOGUCHI N, YANAGIDE E. Life span of solutions for a semilinear parabolic problem with small diffusion [J]. J Math Anal Appl, 2001, 261: 350-368.

Shock Solution for a Class of Singularly Perturbed Nonlinear Equations

ZHOU Kang rong

(Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, Zhejiang, China)

Abstract: The shocks for a class of singularly perturbed boundary value problem of nonlinear differential equations are studied. Firstly, using the method of straightforward expansion the outer solution are constructed. Secondly, using the stretched variable the interior layer solution are constructed. Finally, using the matching principle, the different positions of shocks solution are discussed.

Key words: nonlinearity; singular perturbation; shock solution