

高阶中立型泛函微分方程非振动解的渐近性态^{*}

朱志强

(广东职业技术师范学院计算机科学系, 广东 广州 510665)

摘 要: 考察一类高阶中立型泛函微分方程非振动解的渐近性态, 并给出方程有非振动解的若干充要判据。

关键词: 高阶中立型; 泛函微分方程; 非振动解; 渐近性

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2002) 02-0004-04

本文讨论高阶中立型泛函微分方程

$$(x(t) + c(t)x(t-d))^{(n)} + f(t, x(g_1(t)),$$

$$x(g_2(t)), \dots, x(g_m(t))) = 0, t \geq t_0 \quad (1)$$

非振动解的渐近性态. 其中: ① $c(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = c_0$ 存在; ② $g_i(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, 满足 $g_i(t) \geq t-h$, $h>0$ 为常数, $i=1, 2, \dots, m$; ③ $f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \in C([t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R})$, 当 $x_i x_i > 0$ 及 $t \geq t_0$ 时, $x_i f(t, x_1, \dots, x_m) > 0$, $i=1, 2, \dots, m$; ④ $d>0$ 是常数, m, n 是自然数且 $n \geq 2$.

本文先就 $-1 < c(t) < 0$ 的情况展开讨论。

定义 1^[1] 如果存在连续函数 $p_i(t) \geq 0$,

$\sum_{i=1}^m p_i(t) > 0$, 使当 $y_i \geq x_i > 0$ 或 $y_i \leq x_i < 0$ 时,

有: $\frac{f(t, y_1, \dots, y_m)}{\sum_{i=1}^m p_i(t)y_i} \geq \frac{f(t, x_1, \dots, x_m)}{\sum_{i=1}^m p_i(t)x_i}$, 则称函数

$f(t, x_1, \dots, x_m)$ 是超线性的; 反之, 若不等号“ $\geq$ ”改为“ $\leq$ ”, 则称函数 $f(t, x_1, \dots, x_m)$ 为次线性的。

引理 1 设 $0 < a \leq x_i \leq b$, $i=1, 2, \dots, m$, 则 f 为超线性时, $f(t, a, \dots, a) \leq f(t, x_1, \dots, x_m) \leq$

$f(t, b, \dots, b)$; f 为次线性时, $\frac{a}{b}f(t, b, \dots, b) \leq$

$f(t, x_1, \dots, x_m) \leq \frac{b}{a}f(t, a, \dots, a)$ 。

说明: 可直接从定义 1 得出引理 1 的证明;

$b \leq x_i \leq a < 0$ 时, 可得出与引理 1 类似的结论。

引理 2 设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = c_0$ 存在且 $c_0 \neq \pm 1$,

$\frac{x(t)}{t^j}$ 有界且最终定号, j 为整数;

$$z(t) = x(t) + c(t)x(t-d), \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^j} = b$$

有限, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{b}{1+c_0}$$

利用上、下极限概念可以证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t}$ 存在,

从而结论成立。

1 非振动解的分类

称方程 (1) 的解 $x(t)$ 是非振动的, 如果 $x(t)$ 最终为正或最终为负。

定理 1 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的非振动解, $-1 < c_0 < 0$, 则 $x(t)$ 属于下列类型之一:

$$T_{n-1}(\infty, \infty): \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{|x(t)|}{t^{n-2}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{|x(t)|}{t^{n-1}} = +\infty;$$

$$T_{n-1}(\infty, a): \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{|x(t)|}{t^{n-2}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^{n-1}} = a \neq 0;$$

$$T_r(\infty, a): \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{|x(t)|}{t^{r-1}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^r} = a \neq 0;$$

$$T_r(\infty, 0): \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{|x(t)|}{t^{r-1}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^r} = 0;$$

$$T_r(a, 0): \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^{r-1}} = a \neq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^r} = 0;$$

$$T_0(a): \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a \neq 0$$

或 $T_0(0): \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

其中, $r \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 且当 $x(t)$ 最终为正时, r 与 n 的奇偶性相反; $x(t)$ 最终为负时, r 与 n

* 收稿日期: 2001-07-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60074039)

作者简介: 朱志强 (1963-), 男, 讲师, E-mail: zqzhunet@hotmail.com

的奇偶性相同。

证明 记

$$z(t) = x(t) + c(t)x(t-d) \tag{2}$$

则由方程 (1) 知:

$$z^{(n)}(t) = -f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))) \tag{3}$$

以下考察 n 为偶数的情况(n 为奇数的情况可类似讨论)。设 $x(t)$ 最终为正。存在充分大的 $T > t_0$, 当 $t \geq T$ 时, $x(t) > 0, z^{(n)}(t) < 0$ 。从而 $z(t)$ 最终定号, 不妨设 $t \geq T$ 时, $z(t)$ 定号。若 $t \geq T$ 时 $z(t) < 0$, 可以证明, 对自然数 k

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z(T+kd) = 0 \tag{4}$$

另外, 因为 $z^{(n)}(t)z(t) > 0$, 根据文 2 引理, 有 2 种情况:

- 1) $z^{(k)}(t)z(t) > 0, k = 0, 1, 2, \cdots, n$;
- 2) 存在整数 $r \in \{0, 2, \cdots, n-2\}$, 当 $r \neq 0$ 时, $z^{(r-1)}(t) < 0, g^{(r)}(t) < 0, z^{(r+1)} > 0$; 当 $r = 0$ 时, $z(t) < 0, z'(t) > 0$ 。

若情况 1) 成立, 将有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) < 0$, 与条件 (4) 矛盾; 对情况 2), 若 $r \neq 0$, 同样可推出与 (4) 式矛盾的结论。若 $r = 0$, 结合 (4) 式得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$, 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 即 $x(t) \in T_0(0)$ 。

若 $t \geq T$ 时 $z(t) > 0$, 则 $z^{(n)}(t)z(t) < 0$ 。再根据文[2] 的引理, 存在 $r \in \{1, 3, \cdots, n-1\}$, 使得

$$z^{(r-1)}(t) > 0, z^{(r)}(t) > 0, z^{(r+1)} < 0 \tag{5}$$

由条件 (5) 可设

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(r-1)}(t) = L_{r-1}, \lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(r)}(t) = L_r$$

其中, $0 < L_{r-1} \leq +\infty, 0 \leq L_r < +\infty$ 。

若 $0 < L_r < +\infty$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^r} = \frac{L_r}{r!}$, 且 $\frac{x(t)}{t^r}$ 有界。结合引理 2, 推得

$$x(t) \in T_r(\infty, a);$$

若 $L_r = 0, L_{r-1} = +\infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^r} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^{r-1}} = +\infty$$

由 (2) 式推得 $x(t) \in T_r(\infty, 0)$;

若 $L_r = 0, 0 < L_{r-1} < +\infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^r} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^{r-1}} = \frac{L_{r-1}}{(r-1)!}$$

再由引理 2 得 $x(t) \in T_r(a, 0)$ 。

设 $x(t)$ 最终为负。如同上面的讨论, 存在充分大的 $T > t_0$, 当 $t \geq T$ 时, $x(t) < 0, z^{(n)}(t) > 0$ 。而 $z(t)$ 最终定正。不妨设 $t \geq T$ 时 $z(t) > 0$, 则 $z^{(n)}(t)z(t) > 0$, 类似 $x(t)$ 最终为正的讨论, 分 2 种情况,

情况 1, $z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)}(t) > 0$, 从而

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(n-1)}(t) = L_{n-1} < +\infty$$

或 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(n-1)}(t) = +\infty$

由此推出

$$x(t) \in T_{n-1}(\infty, \infty)$$

或 $x(t) \in T_{n-1}(\infty, a)$

情况 2, 当 $r \neq 0$ 时,

$$z^{(r-1)}(t) > 0, z^{(r)}(t) > 0, z^{(r+1)} < 0$$

同上面的讨论, 有

$$x(t) \in T_r(\infty, a), x(t) \in T_r(\infty, 0)$$

或 $x(t) \in T_r(a, 0)$

当 $r = 0$ 时, 由 $z(t) > 0, z'(t) < 0$ 知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = L_0$$

L_0 为有限常数。结合 (2) 式知 $x(t) \in T_0(a)$ 或 $x(t) \in T_0(0)$ 。证毕。

2 非振动解的充要判据

定理 2 设 $-1 < c_0 < 0, f$ 为超线性或次线性函数, 则方程 (1) 有非振动解 $x(t) \in T_r(\infty, a)$ 的充分必要条件是: 存在常数 $K \neq 0$, 使得

$$\int_{t_0}^{+\infty} s^{n-r-1} |f(s, K(g_1(s))^r, K(g_2(s))^r, \cdots, K(g_m(s))^r)| ds < +\infty \tag{6}$$

其中, $r \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}, r = 0$ 时 $T_r(\infty, a)$ 退化成 $T_0(a), a \neq 0$ 。

证明 引入记号, 设

$$G_x(t) = f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))) \tag{7}$$

$$F_r(t) = f(t, K(g_1(t))^r, K(g_2(t))^r, \cdots, K(g_m(t))^r) \tag{8}$$

由

$$\int_a^x (x-y)^n f(y) dy = n! \int_a^x dy_n \int_a^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_a^{y_2} dy_1 \int_a^{y_1} dy$$

知, (6) 式等价于

$$\int_{t_0}^{+\infty} \int_{s_{n-r-1}}^{+\infty} \cdots \int_s^{+\infty} |F_r(s)| ds ds_1 \cdots ds_{n-r-1} < +\infty \tag{9}$$

必要性 设 $x(t) \in T_r(\infty, a)$ 且 $a > 0 (a < 0$ 时可类似证明)。则存在充分大的 $T > t_0$, 使得当 $t \geq T$ 时,

$$z^{(n)}(t) < 0, \frac{1}{2}at^r \leq x(t) \leq \frac{3}{2}at^r$$

由 (2) 式得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{t^r} = (1+c_0)a$$

从而

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(n)}(t) = (1 + c_0) ar !$$

注意到 $z^{(i)}(t)$ 最终单调, 可推出

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z^{(i)}(t) = 0,$$

$$i = r + 1, r + 2, \dots, n - 1 \quad (10)$$

现在, 对 (3) 式积分 $n - r$ 次, 并利用上式及已知条件, 可得:

$$\int_T^{+\infty} \int_{s_{n-r-1}}^{+\infty} \int_{s_{n-r-2}}^{+\infty} \dots \int_{s_1}^{+\infty} G_x(s) ds ds_1 \dots ds_{n-r-1} < +\infty \quad (11)$$

根据引理 1, 结合 (11) 式知, $x(t)$ 最终为正时, (9) 式成立。必要性证毕。

充分性: 设 $K > 0$ ($K < 0$ 时可类似证明)。 f 为超线性时, 取 $e = \frac{K}{2}$; f 为次线性时, 取 $e = K$ 。

取函数 $R(t) = t^r$, 当 $r = 0$ 时, $R(t) \equiv 1$ 。取常数 $c_1: -c_0 < c_1 < \frac{1-4c_0}{5} < 1$, 则 $c_0 < \frac{1-5c_1}{4}$ 。

注意到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |c(t)| \frac{R(t)}{R(t-d-h)} = |c_0|,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) \frac{R(t-d)}{R(t)} = c_0$$

及条件 (9), 存在充分大的 $T > t_0 + d + h$, 使得

$$|c(t)| \frac{R(t)}{R(t-d-h)} \leq c_1, \quad t \geq T \quad (12)$$

$$0 < -c(t) \leq c_1 < 1, \quad t \geq T \quad (13)$$

$$\frac{R(t-d)}{R(t)} \geq \frac{1-5c_1}{4c(t)}, \quad t \geq T \quad (14)$$

$$\int_T^{+\infty} \int_{s_{n-r-1}}^{+\infty} \int_{s_{n-r-2}}^{+\infty} \dots \int_{s_1}^{+\infty} F_r(s) ds ds_1 \dots ds_{n-r-1}$$

$$ds_{n-r-1} < \frac{1-c_1}{8} e \quad (15)$$

取 $T = T - d - h$, 记函数空间

$$C_R[T, +\infty) = \{x \in C([T, +\infty), \mathbf{R}) :$$

$$\sup_{t \geq T} \frac{|x(t)|}{R^2(t)} < +\infty\}$$

其范数为

$$\|x\|_R = \sup_{t \geq T} \frac{|x(t)|}{R^2(t)}$$

则 $C_R[T, +\infty)$ 成为 Banach 空间。取子集

$$X = \{x \in C_R[T, +\infty) : eR(t) \leq x(t) \leq 2eR(t)\}$$

显然, X 是该 Banach 空间的有界凸闭子集, 且在 X 上, 当 $t \geq T + h$ 时, 有:

$$G_x(t) \leq 2F_r(t) \quad (16)$$

由 (15) 及 (16) 式, 有:

$$\int_T^t \int_T^{s_{n-1}} \dots \int_T^{s_{n-r+1}} \dots \int_{s_{n-r}}^{+\infty} \dots \int_{s_1}^{+\infty} G_x(s) ds ds_1 \dots ds_{n-r-1}$$

$$ds_{n-1} \leq \frac{(1-c_1)eR(t)}{4} \quad (17)$$

在 X 上定义算子 U, S :

$$(Ux)(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}c_1 eR(t) - \frac{c(T)x(T-d)}{R(T)}R(t), & T \leq t < T \\ -\frac{3}{2}c_1 eR(t) - c(t)x(t-d), & t \geq T \end{cases}$$

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}eR(t), & T \leq t < T \\ \frac{3}{2}eR(t) + (-1)^{n-r-1} \int_T^t \int_T^{s_{n-1}} \dots \int_T^{s_{n-r+1}} \int_{s_{n-r}}^{+\infty} \dots \int_{s_1}^{+\infty} G_x(s) ds ds_1 \dots ds_{n-1}, & t \geq T \end{cases}$$

1) 结合 (13)、(14) 及 (17) 式, 容易验证, 对任意 $x, y \in X$, 有

$$eR(t) \leq (Ux)(t) + (Sy)(t) \leq 2eR(t)$$

从而 $Ux + Sy \in X$ 。

2) 利用 (12) 及 (13) 式可得, 当 $t \in [T, +\infty)$ 时,

$$\frac{1}{R^2(t)} |(Ux)(t) - (Sy)(t)| \leq c_1 \sup_{t \geq T} \frac{|x(t) - y(t)|}{R^2(t)}$$

从而对任意

$$x, y \in X, \|(Ux) - (Uy)\|_R \leq c_1 \|x - y\|_R$$

注意到 $0 < c_1 < 1$, 所以 U 是压缩算子。

3) 首先, 利用 (17) 式及 Lebeague 控制收敛定理, 容易证明 S 是 X 上自身的连续算子。为了证明 SX 是相对紧集, 需考察函数族

$$\{(R^{-2}Sx)(t) : x \in X\}$$

$$\text{其中, } (R^{-2}Sx)(t) \triangleq \frac{(Sx)(t)}{R^2(t)}.$$

已知函数族 $\{(R^{-2}Sx)(t) : x \in X\}$ 在区间 $[T, +\infty)$ 上一致有界, 引用文[3]定理, 可以证明 SX 是相对紧集。从而 S 是全连续算子。

根据 Kranselskii 不动点定理, 存在 $x \in X$, 满足 $(Ux)(t) + (Sx)(t) = x(t)$ 。显然, 满足此关系的 $x(t)$ 就是方程 (1) 的非振动解, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^r} = \frac{3(1-c_1)e}{2(1+c_0)}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t^{r-1}} = +\infty$$

即 $x(t) \in T_r(\infty, a)$ 。充分性得证。

定理 3 设 $-1 < c_0 < 0$, f 为超线性或次线性函数, 则方程 (1) 有非振动解 $x(t) \in T_r(a, 0)$ 的充分必要条件是: 存在常数 $K \neq 0$, 使得

$$\int_{t_0}^{+\infty} s^{n-r} |f(s, K(g_1(s))^{r-1}, K(g_2(s))^{r-1},$$

$\cdots, K(g_m(s))^{r-1} \mid ds < +\infty$

其中, $a \neq 0, r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}; r=1$ 时, $(g_i(t))^{r-1} \equiv 1, i=1, 2, \cdots, m$ 。

只需将定理 2 中的 $R(t)$ 改为
 $R(t) = t^{r-1} (r=1 \text{ 时}, R(t) \equiv 1)$

其它过程与定理 2 完全相同。从略。

参考文献:

[1] 李森林, 温立志. 泛函微分方程[M] . 长沙: 湖南科学技术出版社, 1987: 363—364.

[2] LADDE G S, LAKSHMIKANTHAM V, ZHANG B G. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments [M] . New York: Marcel Dekker Inc, 1990: 193—196.
[3] 列维坦 B M. 概周期函数[M] . 余家荣, 张延昌译. 北京: 高等教育出版社, 1956: 162—164.
[4] CHEN Y S. Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of higher order neutral delay differential equations[J] . Ann of Diff Eqs, 1993, 9(3): 270—286.
[5] YU J S. Asymptotic behavior of solutions of neutral equations with positive and negative coefficients[J] . Paramer Math, 1997, 7(3): 85—96.

Asymptotic Behavior of Higher Order Neutral
Functional Differential Equations

ZHU Zhi qiang

(Department of Computer Science, Guangdong Polytechnical Normal University, Guangzhou 510665, China)

Abstract: This paper presents asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of the following equations

$(x(t) + c(t)x(t-d))^{(n)} + f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))) = 0$

First, the classification of the nonoscillatory solutions of the equations under condition of $-1 < c(t) < 0$ is given. Then, the sufficient and necessary conditions that the equations have nonoscillatory solutions are obtained.

Key words: higher order neutral type; functional differential equation; nonoscillatory solution; asymptotic behavior

·简 讯·

本刊“影响因子”再次位于综合性大学学报的首位

据中国科技信息研究所最近公布的“中国科技期刊引证报告——高等学校学报影响因子排序表”，中山大学学报（自然科学版）的影响因子为 0.275，位于综合性高校学报的首位。这也是继 2000 年中国科学引文数据库公布本刊影响因子（0.246）位于综合性高校学报首位后，本刊影响因子再次被权威数据库排列为综合性高校学报的首位。

近年来，本刊坚持办刊宗旨，坚持学术质量第一，立足本校优势，办出自己特色。据中国科学院中国科学引文数据库公布的数据，本刊的被引频次和影响因子已连续 4 年位于中国科技期刊综合类的前 10 名内，连续 4 年该两项指标均进入前 10 名的只有 3 家（另两家为：中国科学 A 辑、南京大学学报）。

2001 年，本刊还进入中国科技期刊“学术影响范围最广的前 30 名期刊”行列。

(本刊通讯员)