

极大 π -商群与正规 π -补^{*}

王晓峰

(深圳大学理学院, 广东 深圳 518060)

摘要: 通过对焦点子群性质的讨论, 获得了有关 π -商群的若干结果. 特别获得了若干极大 π -商群的同构定理, 并且作为这些同构定理的应用, 得到了一个正规 π -补的充分条件.

关键词: Hall π -子群; 极大 π -商群; 正规 π -补

中图分类号: O152.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 04-0108-03

设 π 为某些素数的集合, π' 为 π 在素数全集中的余集. 本文记 G 为任意有限群, 并记 $\pi(G)$ 为 G 的阶 $|G|$ 的全部相异素因子的集合. 如果一个群 G 的 Hall π -子群存在, 并且 G 的所有极大 π -子群两两共轭, 则称 G 为 D_π -群. 如群 G 是 D_π -群, 并且 G 的每一个 π -子群的正规化子群也是 D_π -群, 则称 G 是强 D_π -群. 用记号 $\text{Sylow}(G)$, $\text{Sylow}_p(G)$ 和 $\text{Hall}_\pi(G)$ 分别表示 G 的 Sylow 子群, Sylow p -子群和 Hall π -子群的集合.

记 $G'(\pi)$ 为 G 的使得 $G/G'(\pi)$ 为 G 的最大 Abel π -商群的正规子群, 并记 $O^\pi(G)$ 为群 G 的使得 $G/O^\pi(G)$ 为 G 的最大 π -商群的正规子群. 此外, 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G)$, 称 $H \cap G'$ 为 H 于 G 中的焦点子群.

设群 G 是任意强 D_π -群, 而且 $H, K \in \text{Hall}_\pi(G)$. 如果 $N_H(H \cap K)$ 与 $N_K(H \cap K)$ 均是 $N_G(H \cap K)$ 的 π -子群, 则称 $H \cap K$ 是驯交^[1].

引理 1 设 H 是群 G 的 Hall π -子群, L 为 G 的含 H 的任一子群, 则

$$(1) \quad G/O^\pi(G) \cong L/L \cap O^\pi(G),$$

$$L \cap O^\pi(G) \geq O^\pi(L);$$

(2) 下述断言等价:

$$1) \quad G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L);$$

$$2) \quad |G/O^\pi(G)| \mid |L/O^\pi(L)|;$$

$$3) \quad L \cap O^\pi(G) = O^\pi(L);$$

$$(3) \quad G/G'(\pi) \cong L/L \cap G'(\pi), \quad G/G' \cong (HG'/G') \times (G'(\pi)/G'), \text{ 并且 } L \cap G'(\pi) \geq L'(\pi);$$

(4) 下述断言等价:

$$1) \quad G/G'(\pi) \cong L/L'(\pi);$$

$$2) \quad |G/G'(\pi)| \mid |L/L'(\pi)|;$$

$$3) \quad L \cap G'(\pi) = L'(\pi);$$

$$4) \quad L \cap G' = H \cap L';$$

$$5) \quad HG'/G' \cong HL'/L'.$$

此引理的证明较易 (可参看 [2, p52] 的说明), 略去.

引理 2 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G)$, $G \geq L \geq H$, N 为 G 的正规子群, 并且 $G = NL$. 如有 $I \leq Q = N \cap L$ 并且 $I \triangleleft L$, 使得 Q/I 为 Abel π -商群, 则存在一个 G 到 L/I 内的同态 ϕ , 使得 G 的子群 R 满足 $I \leq R \leq L$, $R/I = \phi(G)$, 并且 $L = QR$, $Q \cap L = I$.

证明 做直积 $G \times (L/I)$, 并令

$G^* = \{(g, Ih) \mid g \in G, h \in L, Ng = Nh = Nh\}$
由文 [3] 第 1 章定理 9.11, G^* 为 $G \times (L/I)$ 的子群. 为计算 G^* 的阶, 先取 G 的单位元 e , 考查 G^* 中形如 (e, Ih) 的元素个数.

设 $h \in L$, $(e, Ih) \in G^*$, 则有 $Ne = N = Nh$, 即 $h \in N \cap L = Q$. 反之, 设 $h \in Q$, 则 $h \in N$, 并且 $Nh = N = Ne$, 从而 $(e, Ih) \in G^*$.

又因 Q 中有 $[Q:I]$ 个 I 的左陪集, 故 G^* 中形如 (e, Ih) 的元素个数为 $[Q:I]$.

现在设 g 为 G 中任意元, 固定 g , 考查 G^* 中形如 (g, Ih) 的元素个数. 因 $G = NL$, 则有 $n \in N$, $l \in L$, 使得 $g = nl$.

如果 $h \in L$, $(g, Ih) \in G^*$, 则有 $Ng = Nnl = Nl = Nh$.

设 n_1 是方程 $h = x l$ 在 L 中的解, 则有 $Ng = Nl = Nn_1 l$, 从而有 $n_1 \in N$, 故 $n_1 \in N \cap L = Q$.

反之, 任取 $n_2 \in Q$, 使得 $Nn_2 l = Nl = Nb$, 则 $(h, In_2 l) \in G^*$.

* 收稿日期: 2001-10-16

基金项目: 教育部优秀青年教师基金资助项目 (200011); 广东省自然科学基金资助项目 (000864)

作者简介: 王晓峰 (1958-), 男, 博士, 副教授; E-mail: wangxf@szu.edu.cn.

故对取定的 g , 如 $g = n_0 l, n_0 \in N, l \in L$, 则 G^* 的元素 (g, lh) 均可写成 (g, lnl) 的形式, 其中 n 为 Q 中任意元, 反之亦然。故 G^* 中形如 (g, lh) 的元素也是 $[Q: I]$ 个。

从而得 $|G^*| = |G| [Q: I]$ 。

再由 G^* 的构造, 以及 $G = NL$, 存在一个从 G^* 到 G 的满同态 ψ , 使得对任意的 $g \in G, \psi(g, lh) \rightarrow g$ 。

令 $M = \ker \psi$, 则有 $M = \{(e, lh) \mid h \in Q\}$, 并且 $M \cong Q/I$ 。则 M 为 G^* 的一个正规子群。

进一步令 L^* 为 L 在 ψ 下的逆象, 由于 M 为 L^* 的子群, 同前面一样有 $|L^*| = |L| [Q: I]$, 并且 $L^* = \{(h, lh) \mid h \in L, lh \in Qh\}$ 。令 $D = \{(h, lh) \mid h \in L\}$, 则 D 为 L^* 的子群, 并且 $|D| = |L|, D \cap M = \{e^*\}$, 其中 $\{e^*\}$ 为 G^* 的单位元。

因 M 为 L^* 的正规子群, $|M||D| = |L| [Q: I] = |L^*|$, 故有 $L^* = MD$ 。

设 H^* 为 H 在 ψ 下的逆象, 则 M 为 H^* 的子群, 并同前面一样有 $|H^*| = |H| [Q: I]$, 即 $H^* \in \text{Hall}_\pi(L^*), H^* \in \text{Hall}_\pi(G^*)$ 。

又 $H^* = M(H^* \cap D)$, 即 H^* 于 M 上分裂。

由文[3] 中第 1 章定理 17.4 知 M 于 G^* 内的补群存在, 设为 G , 并且 $G \cong G^*/M \cong \psi(G^*) = G$ 。

则 ψ 在 G 上的限制 ψ 是 G 到 G 的一个同构。

令 η 是 G^* 到 L/I 上的映射, 满足 $\eta(g, lh) = lh$ 。容易证明 η 是一个同态满射。如令 $\phi = \eta \psi^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} L/I &= \eta(G^*) = \eta(M)\eta(G) = \\ &Q/I\psi(G) = Q/I\phi(G) \end{aligned}$$

令 $\phi(G) = R/I$, 则 $L = Q/R$, 并且 $Q \cap R = I$ 。证毕。

定理 1 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G), L \geq H$ 是 G 的子群, 并且 $H/H \cap O^\pi(L)$ 幂零。那么 $G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L)$ 的充分必要条件是 $H \cap G' = H \cap L'$, 或者 $G/G'(\pi) \cong L/L'(\pi)$ 。

证明 如 $G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L)$, 则

$$\frac{G/O^\pi(G)}{(G/O^\pi(G))'} \cong \frac{LO^\pi(L)}{(LO^\pi(L))'}$$

即 $\frac{G}{O^\pi(G)G'} = \frac{G}{G'(\pi)} \cong \frac{L}{O^\pi(L)L'} = \frac{L}{L'(\pi)}$, 从而也有 $H \cap G' = H \cap L'$ 。

反之, 如果 $\frac{G}{O^\pi(G)}$ 不与 $\frac{L}{O^\pi(L)}$ 同构, 由引理 1, $Q = L \cap O^\pi(G) > O^\pi(L)$ 。

由于 $Q \triangleleft L$, 又因 $Q > O^\pi(L), LO^\pi(L) \cong H/H \cap O^\pi(L)$ 幂零, 则存在 Q 的极大子群 $I \geq O^\pi(L)$, 使

得 Q/I 是 Abel π -商群。

由引理 2, 存在 $R \leq L$, 使得 $L = RQ$, 并且 $R \cap Q = I$ 。

由于 $I < Q$, 故有 $R < L$ 。往证 R 是 L 的极大子群。

设有 L 的子群 $K \geq R$, 则有 $I \leq K \cap Q \leq Q, K \cap Q \triangleleft KQ$, 并且 $KQ = L$ 。

由 I 的定义, 或者 $K \cap Q = I$, 或者 $Q \leq K$ 。又因 $K = R(K \cap Q)$, 故得 $K = R$, 或 $K = L$ 。

从而 R 是 L 的极大子群, 因此 $R/O^\pi(L) \triangleleft L/O^\pi(L)$, 并且 R 是 L 的极大子群。

又因为 $[L: R] = [L/O^\pi(L): R/O^\pi(R)]$ 是一素数, 故得 L/R 是一 Abel 商群, 从而得到 $R \geq L'(\pi) = O^\pi(L)L'$ 。

但因为 $I \leq Q \leq L \cap (O^\pi(G)G')$, Q 不是 R 的子群, 于是 $L \cap (O^\pi(G)G') = L \cap G'(\pi)$ 也不是 R 的子群, 则有 $L \cap G'(\pi) \neq L'(\pi)$ 。

由引理 1, $G/G'(\pi)$ 也不与 $L/L'(\pi)$ 同构, 从而也有 $H \cap G' \neq H \cap L'$ 。证毕。

推论 1 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ 且幂零, $G \geq L \geq H$ 。那么 $G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L)$ 的充分必要条件是 $H \cap G' = H \cap L'$, 或者 $G/G'(\pi) \cong L/L'(\pi)$ 。

由此推论和文[5] 定理 3.7, 我们得到如下推广的 Hall-Grün 定理文[2], 定理 14.4.6)。

定理 2 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ 且幂零, $Z(H)$ 的一特征子群 B 关于 G 于 H 内弱闭, 并且 G 的子群 $L \geq N_G(B)$, 则有 $G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L)$ 。

还可以得到如下若干关于控制转移的充分条件。

定理 3 设 $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ 且幂零, $Z(H)$ 的一特征子群 B 关于 G 于 H 内弱闭, $N = N_G(H)$ 。只要下述条件之一成立则有 $G/O^\pi(G) \cong N/O^\pi(N)$:

- (1) $H' \triangleleft N_G(B)$;
- (2) 存在 G 的子群 $L \geq N_G(B)$, 使得 H 的任意两个元素如在 L 中共轭, 则在 N 中共轭;
- (3) 存在 G 的子群 $L \geq N_G(B)$, 使得 $N_L(K) \leq N$, 并且对任意 $Q \in \text{Hall}_\pi(G), 1 \neq K = H \cap Q$ 驯交。

证明 设 $L \geq N_G(B)$ 。由定理 2, $G/O^\pi(G) \cong L/O^\pi(L)$ 。因 $L \geq H, B$ 为 H 的特征子群, 则有 $L \geq N$ 。

如条件 (1) 被满足, 那么 $H \cap (H')' \subseteq H', (x \in N_G(B)), KH = N_L(H) = N$, 并且 $H \cap K = 1$, 从而 K 为 H 于 N 中的补群, $[H, K] \subseteq H \cap N'$ 。

由文[5] 定理 7, $H \cap L' \subseteq H \cap N'$ 。再由定理

2 可得

$$L/O^{\pi}(L) \cong N/O^{\pi}(N)$$

从而得到

$$G/O^{\pi}(G) \cong N/O^{\pi}(N)$$

由 (C), $H \cap L' = \langle [x, g] \in H, \mid x \in H, g \in L \rangle$.
如条件(2) 成立, 则对 $x \in H, g \in L$, 如果 $[x, g] \in H$, 则有 $y \in H$, 使得 $[x, g] = [x, y]$, 从而 $H \cap L' \subseteq H \cap N'$, 故有 $H \cap L' = H \cap N'$, 故得 $H \cap G' = H \cap N'$, 所以

$$G/O^{\pi}(G) \cong N/O^{\pi}(N)$$

如条件 (3) 成立, 由文 [5] 定理 3.2 和 $H \cap L' = \langle [K, N_L(K)] \mid 1 \neq K = H \cap Q$ 为驯交, $Q \in \text{Hall}_{\pi}(L) \subseteq H \cap N' \rangle$
从而 $H \cap L' = H \cap N', H \cap G' = H \cap N'$, 故有 $G/O^{\pi}(G) \cong N/O^{\pi}(N)$
证毕。

由此结论, 得到如下关于正规 π 补的若干充分条件。

定理 4 设 $H \in \text{Hall}_{\pi}(G)$ 且幂零, $1 \neq B$ 为 $Z(H)$ 的一特征子群且关于 G 于 H 内弱闭,

$[N_G(H):C_G(H)]$ 与 π' 中元互素. 只要下述条件之一成立则 G 有正规 π -补:

- (1) $H' \trianglelefteq_{N_G(B)}$;
- (2) 存在 G 的子群 $L \geq N_G(B)$, 使得 H 的任意两个元素如在 L 中共轭, 则在 N 中共轭;
- (3) 存在 G 的子群 $L \geq N_G(B)$, 使得 $N_L(K) \leq N$, 并且对任意 $Q \in \text{Hall}_{\pi}(G), 1 \neq K = H \cap Q$ 驯交。

参考文献:

[1] GORENSTEIN D. Finite groups[M] . New York: Chelsea, 1980.
[2] HALL M. Theory of groups[M] . 2nd edition. New York: Chelsea, 1976
[3] HUPPERT B. Endliche gruppen I [M] . New York: Springer-Verlag, 1967.
[4] HUPPERT B, BLANKBURN N. Finite groups III[M] . New York: Springer-Verlag, 1982.
[5] 王晓峰, 邱远, 驯交、转移与 π -商群[J] . 数学研究与评论, 2002, 22(3): 460—464.

Maximal π quotients and Normal π complements

WANG Xiao feng

(School of Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: By the study of the properties of focal subgroups under certain conditions, a number of results about π quotients, in particular, a number of isomorphisms of maximal π factors are obtained. As an application of these results, a sufficient condition with which a group is π' -closed is achieved.

Key words: hall π subgroup; maximal π quotient; normal π complement