广义相对论中一个柱对称生成解*

张 靖 仪
(湛江师范学院物理系, 广东 湛江 524048)

摘 要: 利用 G-K 生成技术, 从 Kasner 解生成了一个柱对称真空解, 该解包含了 Einstein 转盘引力场精确解。

关键词: 精确解; Einstein 场方程; 生成技术
中图分类号: O412.1 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2002) 05-0038-02

广义相对论的发展在很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解和它们的物理解释。严格解专家们一方面在寻求场方程的新的严格解, 另一方面尽量寻找一些变换, 从一个已知解生成一个新的解。Geroch[1] 发现, 相变换是场方程更大的协变群的一个特例, Kinnersley[2] 将 Geroch 的工作推广到含电磁场的情况。他研究了存在一个类时 Killing 矢量时 Einstein-Maxwell 方程的对称性, 证明了这些方程具有一个和 $SU(2,1)$ 同构的对称群, 其中某些变换只引起规范变换, 其余的变换则可用来产生场方程的新的解族; 从而提出了一种新的生成技术, 即 G-K 生成技术。本文利用 G-K 生成技术, 从 Kasner 解生成了一个柱对称真空解, 新解包含了 Einstein 转盘解。

1 生成技术

G-K 生成技术可以适用于电磁真空的情况[3]。但对于电磁真空的情况, 操作复杂, 也很难得出形式较简单的新解。作为特例, 本文仅讨论用 G-K 生成技术生成稳态真空新解的方法。

稳态真空轴对称度规形式为[4]

$$ds^2 = f(dt - \omega d\varphi)^2 - f[\exp(2\gamma)(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] \tag{1}$$

其中, f, ω, γ 为坐标 ρ, z 的函数。对应真空 Einstein 引力场方程可以写为

$$\nabla\cdot\{f^{-1}\nabla f + \rho^{-2}f^2\omega\nabla\omega\} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\{\rho^{-2}f^2\nabla\omega\} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{1}{4}\rho f^{-2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{4}\rho^{-1}f^2\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{2}\rho f^{-2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\frac{\partial\omega}{\partial z} \tag{5}$$

作代换

$$\varepsilon_1 = \rho f^{-1} + \omega,\quad \varepsilon_2 = \rho f^{-1} - \omega \tag{6}$$

可将场方程 (2), (3) 改写为

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_1 = 2(\nabla\varepsilon_1)^2 \tag{7}$$

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_2 = 2(\nabla\varepsilon_2)^2 \tag{8}$$

设 $(\mathring{\varepsilon}_1, \mathring{\varepsilon}_2)$ 是方程(7), (8) 的一组解, 根据 G-K 生成技术, 则

$$\varepsilon_1 = \frac{-a + b\mathring{\varepsilon}_1}{b - a\mathring{\varepsilon}_1},\quad \varepsilon_2 = \frac{a + b\mathring{\varepsilon}_2}{b + a\mathring{\varepsilon}_2} \tag{9}$$

也是场方程 (7), (8) 的一组解。这样, 我们可以获得一组新解

$$f = 2\rho\left(\frac{-a + b\mathring{\varepsilon}_1}{b - a\mathring{\varepsilon}_1} + \frac{a + b\mathring{\varepsilon}_2}{b + a\mathring{\varepsilon}_2}\right)^{-1} \tag{10}$$

$$2\omega = \frac{-a + b\mathring{\varepsilon}_1}{b - a\mathring{\varepsilon}_1} - \frac{a + b\mathring{\varepsilon}_2}{b + a\mathring{\varepsilon}_2} \tag{11}$$

而 γ 的表达式则由(4), (5) 两式解出。式中 a, b 为任意常数。

2 生成解

由(7), (8) 式, 可以很容易求得场方程的一个解。最简单的情况是令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(\rho)$, 则有 $\omega = 0$, 方程(7), (8) 全同, 变为

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right) = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2 \tag{12}$$

方程 (12) 的解可写为

$$\varepsilon = k_0\rho^n \tag{13}$$

对应的度规形式为

* 收稿日期: 2002-04-15
作者简介: 张靖仪 (1963 年生), 男, 副教授; E-mail: zjyi@zhjnc.edu.cn

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{k_0\rho^{n-1}}\mathrm{d}t^2 - k_0\rho^{n-1}\left[\rho^{(1-n)^2/2}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\phi^2\right] \tag{14}$$

通过坐标变换可以证明, 此即为 Kasner 柱对称静态真空解[5]。

下面由此解生成新解。

将(13)代入(10), (11)式,结合(4), (5)式,可求得新解为

$$f = \frac{1}{k}\left(\frac{1-\omega_0^2\rho^{2n}}{\rho^{n-1}}\right) \tag{15}$$

$$\omega = k_1\frac{\omega_0^2\rho^{2n}}{1-\omega_0^2\rho^{2n}} + k_2^2\frac{1}{1-\omega_0^2\rho^{2n}} \tag{16}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)^2}{4}\ln\rho + \frac{1}{2}\ln(1-\omega_0^2\rho^{2n}) \tag{17}$$

其中, $\omega_0 = \dfrac{ak_0}{b}$, $k = \dfrac{k_0(b^2-a^2)}{b^2}$, $k_1 = \dfrac{b}{a}$, $k_2 = -\dfrac{a}{b}$。显然有

$$k = (k_1+k_2)\omega_0 \tag{18}$$

新解对应的度规形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{1-\omega_0^2\rho^{2n}}{\rho^{n-1}}\right)\left[\mathrm{d}t - \left(k_1\frac{\omega_0^2\rho^{2n}}{1-\omega_0^2\rho^{2n}} + k_2\frac{1}{1-\omega_0^2\rho^{2n}}\right)\mathrm{d}\varphi\right]^2 - k\left(\frac{\rho^{n-1}}{1-\omega_0^2\rho^{2n}}\right)\left\{\rho^{(n-1)^2/2}\left[1-\omega_0^2\rho^{2n}\right](\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2\right\} \tag{19}$$

3　讨　论

(1) 由 (19) 式可以看出，新解对应的度规中存在代表稳定性的类时 Killing 矢量场 $\zeta^a = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^a$, 代表轴对称性的类空Killing 矢量场 $\psi = \left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a$, 以及反映沿 Z 轴平移不变性的 Killing 矢量场 $\eta^a = \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^a$, 且满足$[\zeta, \psi]^a = 0$, $[\eta, \psi]^a = 0$。因此，对应的解是稳态柱对称真空解[6]。

(2) 令 $n=1$, 取 $k_2=0$, $k=1$, 则 $k_1=1/\omega_0$, 新解变为

$$f = 1-\omega_0^2\rho^2 \tag{20}$$

$$\omega = \frac{\omega_0\rho^2}{1-\omega_0^2\rho^2} \tag{21}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln(1-\omega_0^2\rho^2) \tag{22}$$

新解退化为 Einstein 转盘解, ω_0 为转速。对应的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = (1-\omega_0^2\rho^2)\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}z^2 - 2\omega_0\rho^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t \tag{23}$$

(3) 令 (19) 式中 $\omega_0=0$, 新解退化为 kasner 解。

参考文献:

[1] GEROCH R. A Method for Generating solutions of Einstein's equations[J]. J Math Phys, 1971, 12(6): 918—924.

[2] KINNERSLERY W. Generation of stationary Einstein-Maxwell fields[J]. J Math Phys, 1973, 14(5): 651—653.

[3] 王永久, 唐智明. 引力理论和引力效应[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1990: 274—275.

[4] WALD R M. General relativity[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1984: 166—167.

[5] ISRAEL W. Line sources in general relativity[J]. Phys Rev, 1977, D15(4): 935—941.

[6] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2000: 200—201.

A Cylindrically Symmetric Vacuum Solution in General Relativity

ZHANG Jing yi

(Department of Physics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China)

Abstract: With the G-K generation technique, a new cylindrically symmetric vacuum solution, including the special case of the Einstein's rotating disk gravitation field, is generated.

Key words: exact solution; Einstein equation; generation technique