

关于 g -上鞅的上穿不等式和强 g -上鞅 (I) *

司徒荣, 杨 艳

(中山大学统计学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 推广了无穷时间水平带跳倒向随机微分方程 (BSDE) 解的比较定理, 并用这种带跳 BSDE 定义了 g -鞅与 g -上鞅, 证明了 g -上鞅的上穿不等式。

关键词: 带跳倒向随机微分方程 (BSDE); g -上鞅的上穿不等式; Girsanov 定理; Ito 公式; Gronwall 不等式

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 05-0001-05

倒向随机微分方程是研究数学金融的一个重要工具, 它的理论、观点和分析方法可以广泛地应用与有效地解析金融市场中的多类基本问题与重要问题^[1,2]。本文将运用文 [3—5] 中类似方法来证明用无穷时间水平的带跳倒向随机微分方程所定义的 g -期望, 条件 g -期望和 g -鞅的有关性质。

1 带跳倒向随机微分方程的比较定理

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, 在 $\mathbf{R}^d$ 中考虑下面的带跳倒向 BSDE:

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

其中, $(w_t)_{t \geq 0}$ 是概率空间上标准的 d_1 维布朗运动, $\mathbf{k}^T = (k_1, \dots, k_{d_2})$ 是 d_2 维的相互独立的平稳的泊松点过程, 且各分量之间没有公共跳, $N_{k_i}(ds, dz)$ 是由 k_i 产生的泊松鞅测度, 满足 $N_{k_i}(ds, dz) = N_{k_i}(ds, dz) - \pi(dz)ds$, $i = 1, \dots, d_2$, 其中 $\pi(\cdot)$ 是可测空间 $(Z, \beta(Z))$ 上的 σ -有限测度, $N_{k_i}(ds, dz)$ 是由 k_i 产生的泊松计数测度, τ 是 $\mathcal{F}_t$ -停时 (可以无界), $\mathcal{F}_t$ 是由 $w_s, k_s, s \leq t$, 产生的 σ -代数, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty} = \sigma\{\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$ 。符号 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), S_{\mathcal{F}}^2, L_{\mathcal{F}}^2, F_{\mathcal{F}}^2, L_{\pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}^{d \otimes d_2})$ 同文 [5] 中所定义。则有:

定义 1 称 (x_t, q_t, p_t) 为带跳 BSDE (1) 的解, 若 $(x_t, q_t, p_t) \in S_{\mathcal{F}}^2 \times L_{\mathcal{F}}^2 \times F_{\mathcal{F}}^2$ 且满足 (1) 式^[5]。

下面在 $\mathbf{R}^1$ 中给出带跳 BSDEs 解的比较定理。设 $(x_t^i, q_t^i, p_t^i) (t \geq 0, i = 1, 2)$ 为下面带跳 BSDEs 的解,

$$x_t^i = X^i + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b^i(s, x_s^i, q_s^i, p_s^i, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^i dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s^i(z) N_k(ds, dz)$$

其中, X^i 给定, b^i 为实值函数, $q_s^i \in \mathbf{R}^{1 \otimes d_1}, p_s^i(z) \in \mathbf{R}^{1 \otimes d_2}, i = 1, 2$, 则有:

定理 1 假设:

(1) $b^1(t, x, q, p, \omega) \geq b^2(t, x, q, p, \omega)$; (2) b^2 满足下列条件:

(H): $|b^2(t, x_1, q_1, p, \omega) - b^2(t, x_2, q_2, p, \omega)| \leq c_1(t) |x_1 - x_2| + c_2(t) |q_1 - q_2|$,

$$|b^2(t, x, q, p_1, \omega) - b^2(t, x, q, p_2, \omega)| \leq \sum_{j=1}^{d_2} \int_Z |C_j(z, \omega)| |p_1^j(z) - p_2^j(z)| \pi(dz),$$

其中, $c_i(t) \geq 0, i = 1, 2$ 非随机, 并且满足

$$\int_0^{\infty} (c_1(t) + c_2(t)^2) dt < \infty; \quad C_t(z, \omega)$$

满足条件: (B) $|C_j(z, \omega)| \leq 1, j = 1, \dots, d_2, C_t(z) = (C_{1t}(z), \dots, C_{d_2t}(z)) \in F_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}^{d \otimes d_2})$;

(3) $X^i \in \mathcal{F}_{\tau}, E |X^i|^2 < \infty, i = 1, 2, X^1 \geq X^2$ 。

则在概率测度 P 下几乎处处有:

* 收稿日期: 2003-05-26

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (79790130)

作者简介: 司徒荣 (1935 年生), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: mcsstr@zsu.edu.cn

$$x_t^1 \geq x_t^2, \quad \forall t \in [0, \tau]$$

证明 记 $(\hat{x}_t, \hat{q}_t, \hat{p}_t) = (x_t^2 - x_t^1, q_t^2 - q_t^1, p_t^2 - p_t^1)$ 。则其满足下面的 BSDE:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (a_s(\omega) \hat{x}_s + b_s(\omega) \hat{q}_s^T + \int_Z C_s(z, \omega) \hat{p}_s^T(z) \pi(dz) + f_0(s, \omega)) ds - \\ \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \hat{q}_s^T dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z \hat{p}_s^T(z) N_k(ds, dz) \end{aligned}$$

其中, $\hat{q}_s^T, \hat{p}_s^T$ 分别是 $\hat{q}_s, \hat{p}_s$ 的转置, 并且有:

$$\begin{aligned} X &= X^2 - X^1; \\ a_t(\omega) &= I_{(\hat{x}_t \neq 0)} (b^2(t, x_t^2, q_t^2, p_t^2, \omega) - b^2(t, x_t^1, q_t^2, p_t^2, \omega)) (\hat{x}_t)^{-1} \\ b_t(\omega) &= I_{(\hat{q}_t \neq 0)} (b^2(t, x_t^1, \hat{q}_{t-1}^1, p_t^2, \omega) - b^2(t, x_t^1, \hat{q}_{t-1}^2, p_t^2, \omega)) (\hat{q}_t)^{-1}, i = 1, \dots, d_1 \\ C_t(\omega) &= I_{\left(\int_Z |C_t(z, \omega)| |p_{t-1}^1(z)| \pi(dz) \neq 0\right)} (b^2(t, x_t^1, q_t^1, \hat{p}_{t-1}^1, \omega) - b^2(t, x_t^1, q_t^1, \hat{p}_{t-1}^2, \omega)) \cdot \\ &\quad \left(\int_Z |C_t(z, \omega)| |p_{t-1}^1(z)| \pi(dz) \right)^{-1}; \\ C_t(z, \omega) &= C_t(\omega) \cdot |C_t(z, \omega)| \operatorname{sgn} p_{t-1}, \quad \operatorname{sgn} p_{t-1} = \frac{p_{t-1}}{|p_{t-1}|} \\ f_0(s, \omega) &= b^2(t, x_t^1, q_t^1, p_t^1, \omega) - b^1(t, x_t^1, q_t^1, p_t^1, \omega) \leq 0; \\ \text{且 } \tilde{q}_{t-1}^1 &= (q_{t-1}^1, \dots, q_{it}^1, q_{t+1}^2, \dots, q_{d_1}^2); q_t^1 = (q_t^1, \dots, q_{d_1}^1); \\ \hat{q}_t &= (\hat{q}_{t1}, \dots, \hat{q}_{d_1}); C_t(z, \omega) = (C_{t1}(z, \omega), \dots, C_{d_2t}(z, \omega)) \end{aligned}$$

由假设条件 2 可得:

$$|a_t(\omega)| \leq c_1(t), |b_t(\omega)| \leq c_2(t), |C_t(z, \omega)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, d_2$$

现用文[5]中定理 42 完全一样的证法便可得在概率测度 P 下几乎处处有:

$$x_t^1 \geq x_t^2, \quad \forall t \in [0, \tau]$$

定理 2 设 $(x_t, q_t, p_t), (t \geq 0)$ 是下面带跳 BSDE 的解

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^T dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s^T(z) N_k(ds, dz) \quad (2)$$

(1) 若 b 为实值函数, 且满足:

(i) $b(t, 0, 0, 0, \omega) \equiv 0$;

(ii) b 满足条件(H), 及条件(H)₁:

$$(H)_1: \int_Z |C_t(z)|^2 \pi(dz) \leq c(t), c(t) \text{ 非随机, 满足 } \int_0^\infty c(t) dt < \infty;$$

(2) $0 \leq X \in \mathcal{F}_\tau, E|X|^2 < \infty$

则在概率测度 P 下几乎处处有 $x_t \geq 0, \forall t$; 且 $x_0 = 0 \Leftrightarrow X = 0$ 。其中 $0 \leq t < \tau, \tau$ 可以是 ∞ 。

证明 由条件 1 之 (i), 带跳 BSDE (2) 可写为

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (a_s(\omega) x_s + b_s(\omega) q_s^T + \int_Z C_s(z, \omega) p_s^T(z) \pi(dz)) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^T dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s^T(z) N_k(ds, dz)$$

其中, $a_t(\omega), b_t(\omega), C_t(z, \omega)$ 同定理 1 中所定义, 记

$$\begin{aligned} dQ^{b, \hat{c}} = dP_T = \exp \left[\int_0^T b_s(\omega) dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b_s(\omega)|^2 ds \right] \cdot \prod_{0 \leq s \leq T} \left[1 + \int_Z \sum_{i=1}^{d_2} C_{is}(z, \omega) N_k(\{s\}, dz) \right] \cdot \\ \exp \left[- \int_0^T \int_Z \sum_{i=1}^{d_2} C_{is}(z, \omega) \pi(dz) ds \right] dP \end{aligned}$$

1) 先设 $|C_{jt}(z, \omega)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, d_2$ 。因为 $|b_t(\omega)|^2 \leq c_2(t)^2, |C_{it}(z, \omega)| \leq |C_{it}(z, \omega)|$ 。由所得 $\int_Z |C_t(z, \omega)|^2 \pi(dz) \leq c(t)$, 其中 $c(t)$ 非随机, 满足 $\int_0^\infty c(t) dt < \infty$ 。则由文[5]中引理 15 和定理 16 知对 $\forall 0 \leq T < \infty, P_T$ 是概率测度, 再由 Kolmogorov 测度扩张定理知, 存在概率测度 $Q^{b, \hat{c}}|_{\mathcal{F}_T} = P|_{\mathcal{F}_T} = P_T$ 。所以由 Girsanov 变换知 (2) 式可重新写为

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} a_s(\omega) x_s ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s d\bar{w}_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz)$$

其中, $\bar{w}_t = w_t - \int_0^t b_s^T(\omega)$, $N_k(ds, dz) = \bar{N}_k(ds, dz) - C_{is}(z, \omega) \pi(dz) dt$ 分别为 P 下的布朗运动和鞅测度,

且

$$N_{k_i}(dt, dz) = \bar{N}_{k_i}(dt, dz) - (1 + C_{it}^*(z, \omega)) \pi(dz) dt$$

对 $x_t \exp\left(\int_0^{t \wedge \tau} a_s(\omega) ds\right)$ 用 Ito 公式, 再取条件期望, 可得:

$$x_t = E^P\left[\exp\left(\int_{t \wedge \tau}^{\tau} a_s(\omega) ds\right) X \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right];$$

特别地,

$$x_0 = E^P\left[\exp\left(\int_0^{\tau} a_s(\omega) ds\right) X\right]$$

由已知 $X \geq 0$, 故在概率测度 P 下几乎处处有:

$$x_t \geq 0, \quad \forall t \quad \text{且} \quad x_0 = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

2) 在一般情形, 即 $|C_j(z, \omega)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, d_2$, 令 $C_t^n(z, \omega) = C_t(z, \omega) - \text{sgn} C_t(z, \omega) (1/n)$. 则同样由文[5]中带跳 BSDE 的解的存在、惟一性定理知有惟一解 (x_t^n, q_t^n, p_t^n) 满足下面的 BSDE:

$$x_t^n = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (a_s x_s^n + b_s(\omega) q_s^n + \int_Z C_s^n(z, \omega) p_s^n(z)^T \pi(dz)) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^n d\bar{w}_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s^n(z) N_k(ds, dz)$$

对 $\forall n$, 由 1) 得: $x_t^n \geq 0, \forall t$, 等等. 令 $n \rightarrow \infty$, 即可得证. (以后证明不再重复这一过程).

推论 1 在定理 2 的条件下, 有: (i) $x_t \geq 0, \forall t$; (ii) $P(X > 0) > 0 \Leftrightarrow P(x_0 > 0) > 0$.

推论 2 在定理 1 的条件下, 若再设 $b^1 = b^2$, 则有: (i) $x_t^1 \geq x_t^2, \forall t \in [0, \tau]$;

(ii) $\forall t \in [0, \tau], P(x_t^1 > x_t^2) > 0 \Leftrightarrow P(X^1 > X^2) > 0$.

2 g 期望, g 鞅

考虑下面的无穷时间水平的带跳 BSDE:

$$x_t = \zeta + \int_t^{\infty} g(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_t^{\infty} q_s d\bar{w}_s - \int_t^{\infty} \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \tag{3}$$

其中, $0 \leq t < \infty, \zeta \in L(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 已给定, 函数 $g: [0, \infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d_1} \times L^2_{\pi(\cdot)}(\mathbf{R}^{d_2}) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下面条件: (其中, 记 $\mathbf{R}^{d_1} = \mathbf{R}^{\times d_1}$ 等等)

(A1): g 满足条件 (H) 与 (H)₁;

(A2): $g(t, x, 0, 0, \omega) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$;

(A3): 对 $\forall (x, q, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d_1} \times L^2_{\pi(\cdot)}(\mathbf{R}^{d_2}), g(t, x, q, p, \cdot)$ 是 $\mathcal{F}_t$ -循序可测的.

以下恒设 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 函数 g 满足条件(A1) – (A3). 由文[5]中无穷时间水平带跳 BSDE 解的存在、惟一性定理知: BSDE (3) 有惟一解 $(x_t, q_t, p_t) \in S^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{F}} \times F^2_{\mathcal{F}}$.

定义 2 称 $\epsilon_g[\zeta] := x_0$ 为随机变量 ζ 在时间区间 $[0, \infty]$ 上由函数 g 产生的 g 期望.

称 $\epsilon_g[\zeta | \mathcal{F}_t] := \begin{cases} x_t & 0 \leq t < \infty \\ \zeta & t = \infty \end{cases}$ 为随机变量 ζ 在时间区间 $[0, \infty]$ 上由函数 g 产生的 g 条件期望.

注 若函数 $g = 0$, 则

$$\epsilon_g[\zeta] = E[\zeta]; \quad \epsilon_g[\zeta | \mathcal{F}_t] = E[\zeta | \mathcal{F}_t]$$

我们可得到下面的引理. 引理由解的惟一性易证, 兹从略.

引理 1 设 $(x_t^{\zeta}, q_t^{\zeta}, p_t^{\zeta})$ 为带跳 BSDE (3) 的解, 则对 $\forall A \in \mathcal{F}_r, (0 \leq r < \infty)$, 有:

$$x_t^{I_A \zeta} = I_{A \mathcal{F}_r} x_r^{\zeta}, \quad r \geq 0$$

其中, $x_t^{I_A \zeta}$ 是当终端值为 $I_A \zeta$ 时带跳 BSDE (5) 的解.

由上面的引理可以得到条件 g 期望的另一种定义.

引理 2 若 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 则对给定的 $t \in [0, \infty)$, 必存在惟一的随机变量 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 满足: $\epsilon_g[I_A \zeta] = \epsilon_g[I_A \eta], 0 \leq t < \infty, \forall A \in \mathcal{F}_t$; 此时, 还有 $\eta = x_t^{\zeta}$. 称 η 为随机变量 ζ 由函数 g 在 $\mathcal{F}_t$ 下产生的条件期望.

性质 1 $\zeta \geq 0, \zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 若 $\epsilon_g[\zeta] = 0$, 则 $\zeta = 0, P$ a. s. (证明类似定理 2, 故略。)

性质 2 若 $\forall A \in \mathcal{F}, \epsilon_g[XI_A] = \epsilon_g[YI_A], X, Y \in \mathcal{F}$, 则 $X = Y, P$ a. s. (用反证法由条件和推论 2 可证) 为方便后面的讨论, 引入以下符号, 且在以后的讨论中均假设鞅测度 $N_k(ds, dz)$ 为一维的。

若 $g(x, q, p) = -u(t) | x \vdash v(t) | q \vdash \int_Z | C_t(z, \omega) p(z) | \pi(dz)$, 把 $\epsilon_g[\zeta]$ 记作 $E^{-v, -|C|}[\zeta]$; $g(x, q, p) = -v(t) | q \vdash \int_Z | C_t(z, \omega) p(z) | \pi(dz)$, 把 $\epsilon_g[\zeta]$ 记作 $E^{-v, -|C|}[\zeta]$, 其中 $u(t), v(t), C_t(z, \omega)$ 同 (A1), (A2) 中所定义。记

$$M := \left\{ Q^{-\alpha, -\beta} : E \left[\frac{dQ_T^{-\alpha, -\beta}}{dP} \middle| \mathcal{F}_T \right] = \frac{dQ_T^{-\alpha, -\beta}}{dP}, T \in [0, \infty) \right\}$$

其中, $| \alpha_t | \leq v(t), | \beta_t(z, \omega) | \leq | C_t(z, \omega) |, v(t), C_t(z, \omega)$ 为 (A1), (A2) 中所定义, 且 $G(z, \omega)$ 是一维的。应用上面的符号, 立即可得到下面的引理。

引理 3 对 $\forall \zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 有:

$$\epsilon^{-v, -|C|}[\zeta] = \inf_{Q \in M} E_Q[\zeta]; \epsilon^{v, |C|}[\zeta] = \sup_{Q \in M} E_Q[\zeta]$$

证明 由于两个等式的证明类似, 我们只验证第一个等式。设 (x_t, q_t, p_t) 为下述 BSDE 惟一解:

$$x_t = \zeta - \int_t^\infty \left[v(s) | q_s \vdash \int_Z | C_s(z, \omega) p_s(z) | \pi(dz) \right] ds - \int_t^\infty q_s dw_s - \int_t^\infty \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz), 0 \leq t < \infty \quad (4)$$

令 $\alpha_t^i := v(t) \operatorname{sgn} i q_t; \beta_t(z) := | C_t(z, \omega) | \operatorname{sgn} i p_t$, 其中, $\operatorname{sgn} i q = \frac{q^i}{|q|}, q = (q^1, \dots, q^d)$, 则 (4) 式可写为

$$x_t = \zeta - \int_t^\infty q_s d\bar{w}_s - \int_t^\infty \int_Z p_s(z) N'_k(ds, dz)$$

其中, $\bar{w}_t := w_t + \int_0^t \alpha_s^T ds; N'_k(dt, dz) := N_k(dt, dz) + \beta_t \pi(dz) dt$ 。

由定理 2 同样的证法得 $x_t = E_{Q^{-\alpha, -\beta}}[\zeta | \mathcal{F}_t]$, 又因为 $Q^{-\alpha, -\beta} \in M$, 所以

$$x_t = E_{Q^{-\alpha, -\beta}}[\zeta | \mathcal{F}_t] \geq \operatorname{ess} \inf_{Q \in M} E_Q[\zeta | \mathcal{F}_t]$$

另一方面, 设 $\{\theta_t\}, \{\gamma_t(z, \omega)\}$ 为两随机过程, 满足 $|\theta_t| \leq v(t), |\gamma_t(z, \omega)| \leq |C_t(z, \omega)|$, 用比较定理可得: $x_t^{\theta, \gamma} \geq x_t$, 其中, $x_t^{\theta, \gamma}$ 满足下述 BSDE:

$$x_t^{\theta, \gamma} = \zeta - \int_t^\infty \left[\theta_s q_s^{\theta, \gamma} + \int_Z \gamma_s(z, \omega) p_s^{\theta, \gamma}(z) \pi(dz) \right] ds - \int_t^\infty q_s^{\theta, \gamma} d\omega_s - \int_t^\infty \int_Z p_s^{\theta, \gamma}(z) N_k(ds, dz), 0 \leq t < \infty \quad (5)$$

故 $\operatorname{ess} \inf_{Q \in M} E_Q[\zeta | \mathcal{F}_t] \geq x_t$ 。特别地, 令 $t = 0$, 可得: $\epsilon^{-v, -|C|}[\zeta] = \inf_{Q \in M} E_Q[\zeta]$ 。

定义 3 设 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是一实值 $\mathcal{F}$ -适应过程, $t \in [0, \infty)$, 若 $E |X_t|^2 < \infty$, 及满足: 当 $0 \leq s \leq t < \infty$ 时

$$\epsilon_g[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, (\leq X_s, \geq X_s)$$

则称 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为 g -鞅, (g -上鞅, g -下鞅)。

引理 4 若 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是 g -上鞅, 则 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 也是关于 $E^{-v, -|C|}[\cdot]$ 的上鞅。

最后, 我们给出下面的 g -上鞅的上穿不等式。

定理 3 设 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为 g -上鞅, $\{t_0, \dots, t_n, \dots\}$ 是 $[0, \infty)$ 中一严格增时间序列, 定义 $\cup_a^b(X, n)$ 为 $\{X_{t_i}\}$

在时间 t_n 前上穿区间 $[a, b]$ 的次数, 则有:

$$\epsilon^{-v, -|C|}[\cup_a^b(X, n)] \leq \frac{c}{b-a} \epsilon^{v, |C|}[(X_{t_n} - a)^-] \quad (6)$$

证明 为符号简化起见, 设 w_t 是一维的。对 $j = 1, 2, \dots, n$, 设 $(x_t^{(j)}, q_t^{(j)}, p_t^{(j)})$ 为下面带跳 BSDE 的解:

$$x_t^{(j)} = X_{t_j} + \int_{t_j}^t g(s, x_s^{(j)}, q_s^{(j)}, p_s^{(j)}, \omega) ds - \int_{t_j}^t q_s^{(j)} dw_s - \int_{t_j}^t \int_Z p_s^{(j)}(z) N_k(ds, dz), t \in [0, t_j] \quad (7)$$

令

$$C_s^{(j)}(z, \omega) := \begin{cases} \frac{g(s, x_s^{(j)}, q_s^{(j)}, p_s^{(j)}, \omega) - g(s, x_s^{(j)}, q_s^{(j)}, 0, \omega)}{\int_z |C_s(z, \omega) p_s^{(j)}(z)| \pi(dz)} & \text{当 } \int_z |C_s(z, \omega) p_s^{(j)}(z)| \pi(dz) \neq 0 \\ |C_s(z, \omega)| \operatorname{sgn}(p_s^{(j)}(z)) & \text{且 } s \in [t_{j-1}, t_j] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$C'_s(z, \omega) := \sum_{j=1}^n C_s^{(j)}(z, \omega)$$
$$b_s^{(j)} := \begin{cases} \frac{g(s, x_s^{(j)}, q_s^{(j)}, 0, \omega) - g(s, x_s^{(j)}, 0, 0, \omega)}{q_s^{(j)}} & \text{当 } q_s^{(j)} \neq 0, \text{ 且 } s \in (t_{j-1}, t_j]; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$b'_s(\omega) := \sum_{j=1}^n b_s^{(j)}(\omega)$$

则带跳 BSDE (7) 在 $[t_{j-1}, t_j]$ 中可重新写为

$$x_t^{(j)} = X_{t_j} + \int_t^{t_j} \left[b'_s(\omega) q_s^{(j)} + \int_z C'_s(z, \omega) p_s^{(j)} \pi(dz) \right] ds - \int_t^{t_j} q_s^{(j)} dw_s - \int_t^{t_j} \int_z p_s^{(j)}(z) N_k(ds, dz)$$

由定理 2 同样的方法可证得 $Q = Q^{b', c'}$ 为新的概率测度，且得新的布朗运动与鞅测度，使得：

$$x_t^j = X_{t_j} - \int_t^{t_j} q_s^{(j)} d\bar{w}_s - \int_t^{t_j} \int_z p_s^{(j)}(z) N_k(ds, dz), t \in (t_{j-1}, t_j] \tag{8}$$

由文[5] (p. 28) 知, 在假设条件下有 $E|Q|^2 < \infty$. 故 $E|X_{t_j}|Q < \infty$. 由 (8) 式得：

$$\epsilon_g[X_{t_j} | \mathcal{F}_t] = x_t^j = E_Q[X_{t_j} | \mathcal{F}_t], \forall t \in [t_{j-1}, t_j];$$

且 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是 g -上鞅，故 $E_Q[X_{t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = \epsilon_g[X_{t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}}] \leq X_{t_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n$

所以， $\{X_{t_j}\}_{j=1}^n$ 是 Q 下关于 $\{\mathcal{F}_{t_j}\}_{j=1}^n$ 的上鞅。由经典上鞅的上穿不等式，可得：

$$E_Q[\cup_a^b(X, n)] \leq \frac{c}{b-a} E_Q[(X_{t_n} - a)^-]$$

由引理 3 知： $\forall \zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 有： $\epsilon^{-v, -|c|}[\zeta] \leq E_Q[\zeta] \leq \epsilon^{v, |c|}[\zeta]$ 。故得结论。

参考文献：

[1] 严加安, 彭实戈, 方诗赞, 等. 随机分析选讲[M] . 北京: 科学出版社, 1997.

[2] PENG S G. Monotone limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type[J] . Probab Theory Relat Fields, 1991, 113: 473—499.

[3] CHEN Z J, WANG B. Infinite time interval BSDEs and the convergence of g -martingales[J] . J Austral Math Soc(Ser A), 2000, 69: 187—211.

[4] CHEN Z J, PENG S G. A general downcrossing inequality for g -martingales[J] . Statistics Prob Letters, 2000, 46: 169—175.

[5] SITU R. Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications[M] . 广州: 广东科技出版社, 2000.

On Upcrossing Inequality for
 g Supermartingale and Strong g Supermartingale(I)

SITU Rong, YANG Yan
(Department of Statistics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The comparison theorem for solutions of infinite time interval BSDEs with jumps is improved and the notions of g martingale and g supermartingale via the BSDE with jumps are introduced. Then the Upcrossing Inequality for g -supermartingale is obtained.

Key words: Upcrossing inequality for g supermartingale; backward stochastic differential equation with jumps (BSDE); Girsanov theorem; Ito's formula; Gronwall's inequality