

弹性梁动力响应分析的一种辛算法^{*}

黄伟江, 罗恩, 余慧

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州510275)

摘要: 根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想, 首次建立了线性阻尼情形下弹性梁动力学的相空间(挠度、动量)非传统 Hamilton 型变分原理。这种变分原理不仅能反映这种动力学初值—边值问题的全部特征, 而且它的欧拉方程具有自然辛结构。基于该变分原理, 提出一种称之为辛空间有限元—时间子域法的辛算法。这种新方法由空间域采用有限元法与时间子域采用 Lagrange 插值多项式插值的时间子域法相结合而成。文中算例的计算结果表明, 这种新方法的计算精度和效率都明显高于国际上常用的 Wilson θ 法和 Newmark β 法。

关键词: 相空间; 非传统 Hamilton 型变分原理; 初值—边值问题; 辛算法; 动力响应

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 03-0005-04

1 弹性梁动力学相空间非传统 Hamilton 型变分原理

按文[1, 2]的思路, 可以建立有阻尼弹性梁动力学的相空间(挠度、动量)非传统 Hamilton 型变分原理。对于边界条件 $x=0$; $w=\bar{w}$, $\theta=\bar{\theta}$; $x=l$; $M=\bar{M}$, $Q=\bar{Q}$ 和初始条件 $w(x, 0)=\bar{w}_0$, $p(x, 0)=\bar{p}_0$ 的情形, 其泛函表达式为

$$\begin{aligned} \Pi_2(w, p) = & \int_0^{t_1} \int_0^l \left\{ pw - \frac{1}{2m} p^2 - \frac{EI}{2} (w'')^2 - \bar{c} \dot{w} w + fw \right\} dx dt - \\ & \int_0^{t_1} \underline{[(\bar{w} - w)(-EIw'')' - EI(w' - \bar{\theta})w]}_{x=l} dt + \\ & \int_0^{t_1} \underline{[Qw - Mw]}_{x=l} dt + \\ & \int_0^l \left\{ \bar{p}_0(x) w(x, 0) - \bar{p}(x, t_1) w(x, t_1) + \right. \\ & \left. [\dot{w}(x, 0) - \dot{\bar{w}}_0(x)] p(x, 0) \right\} dx \quad (1) \end{aligned}$$

式中带上标 $\circ$ 的量 of 为限制变分量^[3], 上标 $\circ$ 表示对时间 t 的偏导数, 上角标 $'$ 表示对坐标 x 的偏导数。对于其它边界条件, 上式中的划线项应作相应的改变。式中 $\bar{m}$ 和 $\bar{c}$ 分别是单位梁长的质量和粘性阻尼系数。当梁端支承分别为通常的简支、固支或自由、以及位移满足位移边界条件和位移初始条件时, 式(1)就变成为

$$\Pi_2(w, p) =$$

$$\int_0^{t_1} \int_0^l \left\{ pw - \frac{1}{2m} p^2 - \frac{EI}{2} (w'')^2 - \bar{c} \dot{w} w + fw \right\} dx dt + \int_0^l \left\{ \bar{p}_0(x) \bar{w}_0(x) - \bar{p}(x, t_1) w(x, t_1) \right\} dx \quad (2)$$

2 辛空间有限元—时间子域法

2.1 辛有限元法

对空间域用辛有限元法进行离散。对任一梁单元 e_{ij} , 其结点位移和结点动量分别为:

$$\{q^{(e)}(t)\} = [w_i(t) \quad \theta_i(t) \quad w_j(t) \quad \theta_j(t)]^T \quad (3)$$

$$\{p^{(e)}(t)\} = [\bar{p}_i(t) \quad \bar{r}_i(t) \quad \bar{p}_j(t) \quad \bar{r}_j(t)]^T \quad (4)$$

挠度和动量模式为:

$$w^{(e)}(x, t) = [N(x)] \{q^{(e)}(t)\} \quad (5)$$

$$p^{(e)}(x, t) = [N(x)] \{p^{(e)}(t)\} \quad (6)$$

将式(5, 6)代入式(2), 得:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \int_0^{t_1} \left[\{p\}^T [M^t] \{\dot{q}\} - \frac{1}{2} \{p\}^T [K^p] \{p\} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{\dot{q}\}^T [C] \{q\} + \{F\}^T \{q\} \right] dt + \\ & \int_0^l \bar{p}_0(x) \bar{w}_0(x) dx - \{p_1\}^T [M^t] \{q_1\} \quad (7) \end{aligned}$$

式中

$$[M^t] = \sum_e \int_{\ell^{(e)}} [N(x)]^T [N(x)] dx$$

$$[K^p] = \sum_e \int_{\ell^{(e)}} \frac{1}{m} [N(x)]^T [N(x)] dx$$

* 收稿日期: 2001-11-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10172097, 19902022, 19672074)

作者简介: 黄伟江 (1975-), 男, 硕士, 通讯联系人: 罗恩; E-mail: luoenzsu@sina.com

$$[K] = \sum_e \int_{l(e)} EI [N''(x)]^T [N''(x)] dx$$
$$[C] = \sum_e \int_{l(e)} \bar{c} [N(x)]^T [N(x)] dx$$
$$\{F\} = \sum_e \int_{l(e)} [N(x)]^T f dx$$

$$\{q(t)\} = [q_1(t) \ q_2(t) \ \cdots q_i(t) \ \cdots q_n(t)]^T$$
$$\{p(t)\} = [p_1(t) \ p_2(t) \ \cdots p_i(t) \ \cdots p_n(t)]^T$$

以上各式均是按有限元的一般方法对号集总而成, 设其自由度总数为 $2n = 4n_e$ (n_e 为结点总数)。此外, 在进行数值运算之前, 还应对边界条件进行处理。

2.2 辛时间子域法

辛时间子域法的思想是把所考察的整个时间响应历程划分成若干个时间子域, 在任一时间子域上, 用 Lagrange 插值多项式逼近待定的位移和动量函数, 根据动力学变分原理, 求解出当前时间子域末端的状态值; 然后, 把当前时间子域的末端状态值作为下一个时间子域的初始状态值, 重复上一步计算; 如此进行迭代, 直至最后一个时间子域。

对于任意时间子域 $[t_i, t_{i+1}]$, 令 $t_0 = t_{i+1} - t_i$, 则局部时间坐标表示的时间子域为 $t \in [0, t_0]$; 再把该时间子域等分为 m 段, 令 $s = m + 1$, 每段长为 H , 则无量纲局部时间坐标表示的时间子域为 $\tau \in [0, m]$, 其中 $\tau = t/H$ 。在当前的时间子域上, 令:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^s a_{ij} \varphi_j(\tau) \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

$$p_i(t) = \sum_{j=1}^s b_{ij} \varphi_j(\tau)$$

或表示为:

$$\{q(t)\} = [\Phi(\tau)] \{a\} \tag{8}$$

$$\{p(t)\} = [\Phi(\tau)] \{b\} \tag{9}$$

式中

$$[\Phi(\tau)] = [[\phi_1(\tau)] [\phi_2(\tau)] \cdots [\phi_s(\tau)]]$$

$$[\phi_j(\tau)] = \begin{bmatrix} \varphi_j(\tau) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_j(\tau) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_j(\tau) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

($j = 1, 2, \cdots, s$), φ_j 是 m 次 Lagrange 插值多项式;

$$\{a\} = [a_{11} a_{21} \cdots a_{n1} a_{12} \cdots a_{n2} \cdots a_{ns}]^T$$

$$\{b\} = [b_{11} b_{21} \cdots b_{n1} b_{12} \cdots b_{n2} \cdots b_{ns}]^T$$

将式 (8, 9) 代入式 (7), 得:

$$\Pi_2 = \{b\}^T [M'_t] \{a\} - \frac{1}{2} \{b\}^T [K_t^p] \{b\} - \frac{1}{2} \{a\}^T [K_t] \{a\} - \{\dot{a}\}^T [C_t] \{a\} + \{F_t\}^T \{a\} + \int_0^t \bar{p}_0(x) \tilde{w}_0(x) dx - \{b\}^T [M'_1] \{a\} \tag{10}$$

式中

$$[M'_t] = \int_0^m [\Phi]^T [M'] [\Phi] d\tau$$

$$[K_t^p] = \int_0^m H [\Phi]^T [K^p] [\Phi] d\tau$$

$$[K_t] = \int_0^m H [\Phi]^T [K] [\Phi] d\tau$$

$$[C_t] = \int_0^m [\Phi]^T [C] [\Phi] d\tau$$

$$\{F_t\}^T = \int_0^m H \{F\}^T [\Phi] d\tau$$

$$[M'_1] = [\Phi_1]^T [M'] [\Phi_1]$$

上面的 $\{F\}$ 是整体时间坐标的函数, 积分时要把它转换到当前时间子域的局部时间坐标上。

令 $\delta \Pi_2 = 0$, 并整理可得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}([K_t] + [K_t]^T) + [C_t]^T & [M'_1]^T - [M'_t]^T \\ -[M'_t] & \frac{1}{2}([K_t^p] + [K_t^p]^T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_t\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

求解方程 (11) 时应先处理初始条件。求解处理后的线性方程组可得到当前时间子域内各结点任一时刻的位移和动量。然后, 把当前时间子域末端的状态值作为下一时间子域的初始状态值, 如此重复进行就形成迭代算法。

3 算 例

假设弹性梁长 50 cm, 宽 1 cm, 高 2 cm, 弹性模量 $E = 1.5 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho = 0.008 \text{ kg/cm}^3$, 周期干扰力 $f = 100 \sin(500t) (\text{kg})$ 作用于梁中点, 初位移 $\tilde{w}_0 = 0$, 初动量 $\tilde{p}_0 = 0$, 计算梁中点的动挠度值。这里将梁等分成 10 个单元, 时间子域分别采用 5 次、4 次、3 次 Lagrange 插值多项式, 解析解取前 20 阶振型。有关各种边界条件的弹性梁的计算结果比较分别见表 1 和图 1-4。图中的本文解表示时间子域采用 5 次 Lagrange 插值多项式, 其长度取 $5H = 5\Delta t$ 。表中计算结果的右边列是相对误差百分比。

表 1 一端固支一端简支弹性梁的动力响应值 ($\Delta t=0.0004\text{ s}$)

Tab. 1 Dynamic response values of elatic beam with one fixed end and the other simply supported end

时刻 s	解析解 mm	本文解/ mm						Wilson- θ 法		Newmark- β 法	
		$5H=\Delta t$		$5H=5\Delta t$		$4H=\Delta t$		$3H=\Delta t$		$\theta=1.4, \Delta t$	$\beta=0.25, \Delta t$
0.0004	0.0209	0.0209	0.00	0.0216	-3.35	0.0210	0.0208	0.0152	27.27	0.0244	-16.75
0.0008	0.1170	0.1170	0.00	0.1177	-0.60	0.1170	0.1173	0.1080	7.69	0.1217	-4.02
0.0012	0.3294	0.3295	-0.03	0.3286	0.24	0.3294	0.3290	0.3031	7.98	0.3238	1.70
0.0016	0.6518	0.6518	0.00	0.6511	0.11	0.6520	0.6514	0.6019	7.66	0.6306	3.25
0.0020	1.0340	1.0340	0.00	1.0336	0.04	1.0339	1.0349	0.9629	6.88	0.9980	3.48
0.0024	1.3872	1.3873	-0.01	1.3845	0.19	1.3870	1.3870	1.3139	5.28	1.3479	2.83
0.0028	1.6167	1.6166	0.01	1.6167	0.00	1.6171	1.6167	1.5741	2.63	1.5974	1.19
0.0032	1.6671	1.6670	0.01	1.6683	-0.07	1.6668	1.6686	1.6787	-0.70	1.6772	-0.61
0.0036	1.5258	1.5258	0.00	1.5258	0.00	1.5256	1.5255	1.5996	-4.84	1.5657	-2.62
0.0040	1.2264	1.2264	0.00	1.2287	-0.19	1.2272	1.2258	1.3567	-10.62	1.2988	-5.90
0.0044	0.8578	0.8578	0.00	0.8614	-0.42	0.8573	0.8584	1.0073	-17.43	0.9367	-9.20
0.0048	0.5131	0.5133	-0.04	0.5120	0.21	0.5128	0.5116	0.6272	-22.24	0.5609	-9.32

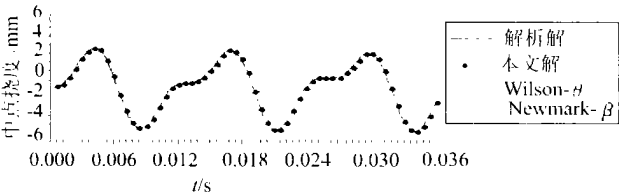


图 1 两端简支弹性梁 ($\Delta t=0.0006\text{ s}$)
Fig. 1 Elastic beam with two simply supported ends

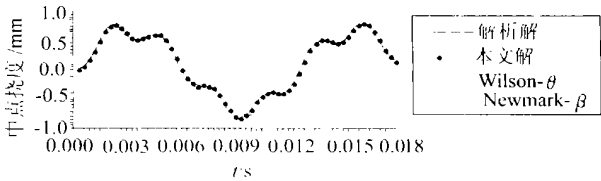


图 2 两端固支弹性梁 ($\Delta t=0.0003\text{ s}$)
Fig. 2 Elastic beam with two fixed ends

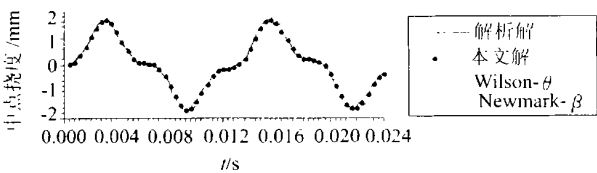


图 3 一端固支一端简支弹性梁 ($\Delta t=0.0004\text{ s}$)
Fig. 3 Elastic beam with one fixed end and the other simply supported end

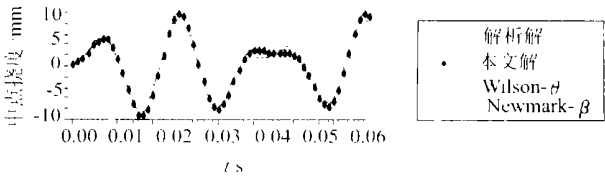


图 4 一端固支一端自由弹性梁 ($\Delta t=0.001\text{ s}$)
Fig. 4 Elastic beam with one fixed end and the other free end

4 结 语

本文首次建立了有阻尼弹性梁动力学的相空间(挠度、动量)非传统 Hamilton 型变分原理。从这种相空间变分原理导出的算法自然能保持哈密顿体系的结构特性,从而就能提出一些计算性能更好的高效辛算法。但是,至今国内外都没有提出基于相空间变分原理的辛算法。本文正是这方面工作的一个开始。本文基于所建立的相空间变分原理,提出一种称之为辛空间有限元一时间子域法的辛算法。文中用这种辛算法分析了 4 种支承条件下弹性梁的动力响应问题。图 1—4 都是前 60 步的结果比较,从图中可以看出,尽管经过这么多次的迭代,本文方法的结果仍然与解析解很吻合,这说明了本文方

法不但计算精度很高,而且表现出良好的稳定性和收敛性。当时间子域用 5 次 Lagrange 插值多项式插值时,甚至时间子域为 5 倍时间步长,其精度仍很高;若时间子域分别采用 4 次和 3 次 Lagrange 插值多项式插值时,其精度也比较高。从所有算例都明显看出,本文的新方法的计算精度远高于国际上常用的 Wilson- θ 法和 Newmark- β 法。并且,在达到相同精度的情况下,本文方法的计算时间只是 Wilson- θ 法和 Newmark- β 法的 60%,这说明了其效率远高于 Wilson- θ 法和 Newmark- β 法。此外,作者还从数学上证明了这种辛算法是无条件稳定的,并且其稳定性很好(另文给出)。由于这种哈密顿力学体系下的新方法的稳定性、收敛性、计算精度和效率都高于拉格朗日力学体系下的已有方法,因此这种辛算法具有广阔的应用前景。

参考文献:

[1] LUO E, CHEUNG Y K. On the variational principles in linear elastodynamics[J] . Acta Mechanica Sinica, 1988, 4(4): 337— 349.

[2] 罗恩. 几何非线性弹性动力学中广义 Hamilton 型拟变分原理[J] . 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(2): 15— 19.

[3] FINLAYSON B A. The method of weighted residuals and variational principles[M] . New York: Acad Press, 1972.

[4] 罗恩, 潘小强, 张贺忻, 等. 一种基于 Hamilton 型拟变分原理的时间子域法[J] . 工程力学, 2000, 17(4): 13— 20.

[5] 黄伟江, 余勇, 潘小强, 等. 弹性地基梁动力响应分析的新方法[J] . 工程力学, 1999, 3(增刊): 484— 488.

A Symplectic Algorithm for Dynamic Response Analysis of Elastic Beams

HUANG Wei jiang, LUO En, SHE Hui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat -sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: According to the basic idea of classical *yin yang* complementarity and modern dual complementarity, the unconventional Hamilton type variational principle in phase space for dynamics of elastic beam with linear damping is established, which can fully characterize the initial boundary value problem of this dynamics. And its Euler equations possess natural symplectic structure. Based on this variational principle in phase space, a symplectic space finite element time subdomain method is presented. This new method is the result of combining finite element method in space domain with time subdomain method by applying the Lagrange interpolation polynomials as approximation to the time subdomain. The numerical results show that the computational accuracy and efficiency of this new method excel obviously those of widely used Wilson - θ method and Newmark β method.

Key words: phase space; unconventional Hamilton type variational principle; initial boundary value problem; symplectic algorithm; dynamic response

(上接第 4 页)

参考文献:

[1] AHMED N U, BISWAS S K. Mathematical modeling and control of large space structure with multiple appendage[J] . Math Comput Modeling, 1988, 10(12): 891— 900.

[2] CHEN G, DELFOUR M C, KRALLA M, et al. Modelling stabilization and control of serially connected beams [J] . SIAM J Contr Optimiz, 1987, 25(3): 526— 546.

[3] MEIROVITCH L. Dynamics and control of structures [M] . New York: Wiley, 1990.

[4] 刘延柱. 充液刚体动力学[M] . 上海: 上海交通大学出版社, 1989.

[5] MORGUL Q. Control and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body[J] . Int J Contr, 1990, 51(1): 11— 31.

[6] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M] . Berlin: Springer -Verlag, 1983.

Attitude Stability and Control of the System Coupled with Fluid, Rigid Body and Elastomer

XU Jian guo¹, LIU Ji ke²

(1. Department of Information Science and Mathematics, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, China;
2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat -sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The dynamic model of a class of the system coupled with fluid, rigid body and elastomer is established. The control law of the system is given, and the attitude stability of the complex controlled system is studied in infinite dimensional functional spaces by means of the modern mathematical and large scale system analysis.

Key words: system coupled with fluid, solid and control; dynamics; stability; control