

# 一类离散动力系统的吸引子和分支问题\*

陈显强, 赵 怡

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 研究了一类形如  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^m(x), \dots\}$ ,  $x \in (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$  的离散动力系统, 这里映射  $f(x) = x^2/2 + (1 - \sqrt{1+\lambda})x$ , 其中参数  $\lambda \in (0, 4)$ 。证明了当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 平衡点 0 是渐近稳定的,  $\{0\}$  是系统的吸引子, 它由单独一个平衡点构成; 当  $3 < \lambda < 4$  时, 平衡点 0 是不稳定的,  $\Delta = \{0, \alpha, \beta\}$  是系统的吸引子。因而参数  $\lambda = 3$  是一个分支点。

**关键词:** 离散动力系统; 平衡点; 终于平衡点; 吸引子; 稳定性; 分支

**中图分类号:** O19 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 05-0005-03

动力系统研究系统的状态随时间的变化而变化的性质和变化规律, 关注系统的长期性和终极性状态, 即系统的长时间行为。动力系统的分支(分岔)现象指的是随着某些参数的变化, 系统的动力性态发生质的变化, 特别是系统的平衡状态发生稳定性改变或出现解的轨道分支。动力系统的分支现象不但在数学领域如动力系统理论、微分方程、拓扑、几何, 而且在工程科学如神经网络、电网、电路、流体动力学、化学反应等方面都受到高度的重视并有相当长时间和非常大量的研究。并且, 近 10 多年来, 动力系统分支问题的研究在工程系统控制理论中也进行得十分活跃<sup>[1]</sup>。

离散动力系统通常由一个映射的迭代产生。本文讨论下列映射

$$f(x) = x^2/2 + (1 - \sqrt{1+\lambda})x, \\ x \in (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$$

考虑在区间  $I = (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$  上由映射  $f$  的迭代产生的离散动力系统

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^m(x), \dots\} \quad (1)$$

其中,  $\lambda$  是参数,  $0 < \lambda < 4$ 。本文证明了: 当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 平衡点 0 是渐近稳定的, 集合  $\{0\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$  上的全局吸引子, 它由单独一个平衡点构成。当  $3 < \lambda < 4$  时, 平衡点 0 是不稳定的, 集合  $\Delta = \{0, \alpha, \beta\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$  上的全局吸引子, 它由一个平衡点和一条周期轨道构成。系统(1)的平衡状态  $\bar{x} = 0$  在  $\lambda = 3$  处发生稳定性改变, 因而参数是一个分支点。

## 1 定义和引理

关于动力系统的基本概念, 如平衡点, 平衡点是稳定的和渐近稳定的, 以及  $\omega$  极限集, 吸引子, 周期点等概念, 参见文[2]; 而分支(分岔)的概念参见文[3]。

参照文[4]中终于周期点的概念, 引入终于平衡点的概念。

**定义** 若  $x$  不是平衡点, 即  $f(x) \neq x$ , 但存在最小的正整数  $m$  使得  $\bar{x} = f^m(x)$  是平衡点, 则称  $x$  是一个  $m$  阶的终于平衡点。

为简化书写起见, 以下记

$$a = \sqrt{1+\lambda} - 1, b = 2\sqrt{1+\lambda}, \\ \alpha = \sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda-3} - 2, \quad (2) \\ \beta = \sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda+3} - 2$$

易见, 对  $\forall \lambda > 0$ , 有  $0 < a < b$ 。容易验证下列引理 1-引理 4 成立。

**引理 1** (1) 当  $0 < \lambda < 4$  时, 映射  $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1+\lambda})x$  在  $[-2, a]$  上严格单调减少, 在  $[a, b]$  上严格单调增加; 在  $[-2, b]$  上的最大值为  $f(-2) = f(b) = b$ , 最小值为  $f(a) = a - \frac{\lambda}{2}$ , 且

$$0 < f\left[a - \frac{\lambda}{2}\right] < a, -2 < f(a) < 0 \quad (3)$$

(2) 当  $x \in [-2, b]$  时, 有  $f(x) \in [-2, b]$ 。因此映射  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1+\lambda})x$  是从闭区间  $J =$

\* 收稿日期: 2002-01-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871094); 广东省自然科学基金资助项目(990229)

作者简介: 陈显强(1962年生), 男, 博士, 广东广播电视大学副教授;

通讯联系人: 赵怡; E-mail: xqchen@gdntu.edu.cn

$[-2, b]$  到  $J$  的一个区间自映射。

(3) 当  $x \in (-2, b)$  时,  $f(x) \in (-2, b)$ 。因此, 映射  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1 + \lambda})x$  也是从开区间  $I = (-2, b)$  到  $I$  的一个区间自映射。

引理 2 (1) 对任何参数  $\lambda \in (0, 4)$ ,  $\bar{x} = 0$  都是系统(1) 的平衡点, 而且是系统(1) 在开区间  $I = (-2, b)$  中的惟一平衡点。

(2) 当  $3 < \lambda < 4$  时,  $-2 < \alpha < 0 < \beta < a$ , 且  $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$  (4)

所以  $\alpha$  和  $\beta$  都是以 2 为周期的周期点, 以  $\alpha$  或  $\beta$  为初值的轨道是周期轨道。

引理 3 当  $0 < \lambda < 4$ , 映射  $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1 + \lambda})x$  满足

当  $-2 < x < 0$  时,  $f(x) > x$ ; 当  $0 < x < b$  时,  $f(x) < x$ 。

引理 4 当  $0 < \lambda < 4$  时, 对任意  $x \in (-2, b)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L$  存在, 则必有  $L = 0$  或  $L = b$ 。

引理 5 当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 对任何初值  $x \in (-2, b)$ , 记

$$y_0 = x, y_{n+1} = f(y_n), n = 0, 1, \dots$$

系统 (1) 从初值出发的轨道为序列:

$$\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \quad (5)$$

它满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 。

证明 假如对一切  $n \geq 1$  都有  $y_n \geq a$ , 则  $a \leq y_n < b$ , 且  $y_{n+1} < y_n, n = 1, 2, \dots$ 。故  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$  存在且  $a \leq L < b$ , 与引理 4 相矛盾。所以, 必存在最小正整数  $m$  使得  $y_m < a$ 。由  $a - \frac{\lambda}{2} \leq y_m < a$ , 递推可得

$$a - \frac{\lambda}{2} \leq y_{n-m} < a, \forall n > m \quad (6)$$

(1) 若  $y_m = 0$ , 则  $y_n = 0, \forall n \geq m$ , 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

(2) 若  $y_m > 0$ , 则由  $0 < y_m < a$  可得

$$\begin{cases} y_m > y_{m+2} > y_{m+4} > \dots > 0, & y_{m+2k} \rightarrow 0 \\ y_{m+1} < y_{m+3} < y_{m+5} < \dots < 0, & y_{m+2k+1} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7)$$

(3) 若  $y_m < 0$ , 则类似于(2) 可证

$$\begin{cases} y_m < y_{m+2} < y_{m+4} < \dots < 0, & y_{m+2k} \rightarrow 0 \\ y_{m+1} > y_{m+3} > y_{m+5} > \dots > 0, & y_{m+2k+1} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (8)$$

引理 6 当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 对  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x| < \delta$  时, 有

$$|f^n(x)| < \epsilon, n = 0, 1, 2, \dots$$

证明 由引理 5 的证明可知, 当  $0 < x < a$  时, 有

$$\begin{cases} x > f^2(x) > f^4(x) > \dots > 0 \\ f(x) < f^3(x) < f^5(x) < \dots < 0 \end{cases}$$

当  $f(a) < x < 0$  时, 有

$$\begin{cases} x < f^2(x) < f^4(x) < \dots < 0 \\ f(x) > f^3(x) > f^5(x) > \dots > 0 \end{cases}$$

所以, 当  $f(a) < x < a$  时, 有

$$|f^n(x)| < \max\{|x|, |f(x)|\}$$

又

$$|f(x)| = |f'(\zeta)| |x| = |\zeta - a| |x| < (a + |x|) |x|$$

注意到当  $|x| < \frac{\sqrt{a^2 + 4\epsilon} - a}{2}$  时, 有  $(a + |x|) |x| < \epsilon$ , 且  $\frac{\sqrt{a^2 + 4\epsilon} - a}{2} < \epsilon$ , 所以, 取

$$\delta = \min\left\{\frac{\sqrt{a^2 + 4\epsilon} - a}{2}, a, |f(a)|\right\}$$

即可。

引理 7 当  $3 < \lambda < 4$  时, 对任何  $x \in (-2, b)$ , 若从  $x$  出发的轨道

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

收敛, 则  $x$  必为终于平衡点, 即存在最小自然数  $m$  使得  $f^m(x)$  为平衡点, 因而  $f^m(x) = 0$ 。

证明 用引理 5 中的记号, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$ , 由引理 4 知:  $L = b$  或  $L = 0$ 。仿引理 5 的证明可证  $L \neq b$ , 因而  $L = 0$ 。由迭代公式可得

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{y_{n+1} + y_n - 2a}{2} (y_{n+1} - y_n)$$

由于  $\lambda > 3$ , 因而  $a = \sqrt{1 + \lambda} - 1 > 1$ ; 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 所以存在正整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时

$$\left| \frac{y_{n+1} + y_n - 2a}{2} \right| \geq 1, \text{ 所以}$$

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \geq |y_{n+1} - y_n|, n \geq N$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+1} - y_n| = 0$ , 因而  $y_{n+1} = y_n, n \geq N$ , 因而  $y_n = 0, n \geq N$ 。

引理 8 当  $3 < \lambda < 4$  时, 对任何  $x \in (-2, b)$ , 如果  $x \neq 0$  且  $x$  不是终于平衡点, 则从  $x$  出发的轨道必分成

$$\{x, f^2(x), f^4(x), \dots, f^{2k}(x), \dots\}$$

和

$$\{x, f^3(x), f^5(x), \dots, f^{2k+1}(x), \dots\}$$

2 支, 其中一支收敛于  $\alpha = \sqrt{1 + \lambda} - \sqrt{\lambda - 3} - 2$ , 另一支收敛于  $\beta = \sqrt{1 + \lambda} + \sqrt{\lambda - 3} - 2$ 。

证明 由引理 7 及  $x$  的假设可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$  不存在。

仿照引理 5 的证明可得, 存在最小正整数  $m$  使得  $y_m < a, y_m \neq 0$ 。

若  $y_m = \alpha$  或  $y_m = \beta$ , 则结论显然成立。

若  $y_m \neq \alpha$  且  $y_m \neq \beta$ , 则不妨设  $y_m > 0$ 。

当  $0 < y_m < \beta < \alpha$  时, 仿引理 5 可以证明

$$\begin{cases} 0 < y_m < y_{m+2} < y_{m+4} < \dots < \beta, y_{m+2k} \rightarrow \beta \\ 0 > y_{m+1} > y_{m+3} > y_{m+5} > \dots > \alpha, y_{m+2k+1} \rightarrow \alpha \end{cases}$$

同理, 当  $0 < \beta < y_m < \alpha$  时, 仿引理 5 可以证明

$$\begin{cases} y_m > y_{m+2} > y_{m+4} > \dots > \beta, y_{m+2k} \rightarrow \beta \\ y_{m+1} < y_{m+3} < y_{m+5} < \dots < \alpha, y_{m+2k+1} \rightarrow \alpha \end{cases}$$

引理 9 设  $0 < \lambda < 4$  且  $x_1 = 2a, x_{n+1} = a + \sqrt{a^2 + 2x_n}, n = 1, 2, \dots$ , 则  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < b$ , 且  $x_n \rightarrow b$ , 并且  $x_n$  是  $n$  阶终于平衡点。

证明 设  $g(x) = \sqrt{a^2 + 2x} + a$ , 则  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调增加,  $x_1 = g(0) = 2a > 0$ 。由此可证  $x_n < x_{n+1} < b = 2a + 2, n = 1, 2, \dots$ 。设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , 则  $L = a + \sqrt{a^2 + 2L} = b$ 。由定义易验证  $x_n$  是  $n$  阶终于平衡点,  $n = 1, 2, \dots$ 。

引理 10 设  $0 < \lambda < 4$ , 记

$$E_m = \{x \mid x \in (-2, b), x \text{ 是映射 } f \text{ 的一个 } m \text{ 阶终于平衡点}\}, m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

则  $E_m$  是非空有限集,  $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$  是一个可列集。

证明 由引理 9 知  $E_m$  非空。又  $x \in E_m$  时, 必有  $f^m(x) = 0$ 。注意到  $f^m(x)$  是  $x$  的一个多项式, 方程  $f^m(x) = 0$  在  $(-2, b)$  中最多存在有限多个根, 所以  $E_m$  是有限集。

## 2 定理及其证明

综合上述引理, 得到下列定理。

定理

(1) 对任何  $\lambda \in (0, 4)$ , 映射  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1 + \lambda})x$  是从开区间  $I = (-2, b)$  到  $I$  的一个区间自映射, 也是从闭区间  $J = [-2, b]$  到  $J$  的一个区间

自映射。

(2) 当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 对任何初值  $x \in (-2, b)$ , 系统(1)的轨道都趋于平衡点 0, 且平衡点 0 是渐近稳定的,  $\omega(x) = \{0\}$ 。集合  $\{0\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, b)$  上的全局吸引子, 它由单独 1 个平衡点构成。

(3) 当  $3 < \lambda < 4$  时, 平衡点 0 是不稳定的。存在可列集  $E \subseteq (-2, b)$ , 对任何  $x \in E, x$  是终于平衡点,  $\omega(x) = \{x\}$ 。对  $x \neq 0$  且  $x \in (-2, b) \setminus E, \omega(x) = \{\alpha, \beta\}$ 。集合  $\Delta = \{0, \alpha, \beta\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, b)$  上的全局吸引子, 它由 1 个平衡点和 1 条周期轨道构成。系统(1)的平衡状态  $\bar{x} = 0$  在  $\lambda = 3$  处发生稳定性改变, 因而参数  $\lambda = 3$  是一个分支点。

证明 由引理 6 知, 当  $0 < \lambda \leq 3$  时, 平衡点  $\bar{x} = 0$  是稳定的; 再由引理 5, 得平衡点  $\bar{x} = 0$  是渐近稳定的, 且集合  $\{0\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, b)$  上的全局吸引子。

根据引理 8 和引理 10, 当  $3 < \lambda < 4$  时, 区间  $(-2, b)$  中除去平衡点 0 和可列个终于平衡点之外, 从其它任何一点出发的轨道都分成奇数项子列和偶数项子列, 其中一个趋于  $\alpha$  而另一个趋于  $\beta$ 。所以, 平衡点 0 是不稳定的。引理 8 还表明, 当  $3 < \lambda < 4$  时, 由一个平衡点和一条周期轨道构成的点集  $\Delta = \{0, \alpha, \beta\}$  是系统(1)在区间  $I = (-2, b)$  上的全局吸引子。

参考文献:

[1] 陈关荣. 控制动力系统的分岔现象[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 153-159.

[2] 张景中, 杨路, 张伟年. 迭代方程与嵌入流[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1998: 21-22.

[3] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 1981: 188-189.

[4] 张筑生. 微分动力系统原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 12-13.

## On the Attractor and Bifurcation of a Discrete Dynamical System

CHEN Xian qiang, ZHAO Yi

(Department of Mathematics, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** This paper deals with a discrete dynamical system in the form of  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^m(x), \dots\}, x \in (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$ , where  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (1 - \sqrt{1+\lambda})x, \lambda \in (0, 4), x \in (-2, 2\sqrt{1+\lambda})$ . It is proved that the equilibrium  $x=0$  is asymptotically stable and  $\{0\}$  is an attractor for  $0 < \lambda \leq 3$ , while the equilibrium  $x=0$  is unstable and  $\{0, \alpha, \beta\}$  is an attractor for  $3 < \lambda < 4$ , and  $\lambda=3$  is a bifurcation point of the discrete dynamical system.

**Key words:** discrete dynamical system; equilibrium point; eventual equilibrium point; attractor; stability; bifurcation