

双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性^{*}

高 潮¹, 周山雪²

(1. 东莞理工学院电子工程系, 广东 东莞 523106;
2. 深圳职业技术学院电子工程系, 广东 深圳 518055)

摘 要: 研究了带连续时延杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性, 通过构造适当的 Lyapunov 泛函获得了与时延无关的充分条件且保证网络指数收敛到惟一稳定的平衡点, 在证明过程中, 并不要求突轴联结权的对称性和激活函数的单调性与可微性, 因此论文所推导的结果更具一般性。

关键词: 双向联想记忆; 神经网络; 连续时延; 全局指数稳定性

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 06-0014-04

1 全局指数稳定性分析

研究下面带连续时延杂交双向联想记忆神经网络模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^p w_{ji} s_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^p w_{ji}^{\tau} \int_{-\infty}^t K_{ji}(t-s) s_j(y_j(s)) ds + I_i \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n v_{ij} s_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^n v_{ij}^{\tau} \int_{-\infty}^t N_{ji}(t-s) s_i(x_i(s)) ds + J_j \end{cases} \quad (1)$$

这里, $i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ (如无说明, 后面的 i, j 同样), $t > 0$, $x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别记神经元场 F_X 和 F_Y 的第 i 和 j 个神经元的膜电位. $w_{ji}, w_{ji}^{\tau}, v_{ij}, v_{ij}^{\tau}$ 记突触联接权; I_i 和 J_j 记外部输入, a_i 和 b_j 记神经变化的速度, $s_i(\cdot)$ 和 $s_j(\cdot)$ 记非线性激活函数. 假设:

$$a_i, b_j \in (0, +\infty), w_{ji}, w_{ji}^{\tau}, v_{ij}, v_{ij}^{\tau}, I_i, J_j \in \mathbf{R} \quad (2)$$

这里, $\mathbf{R}$ 记实数集合. 非线性激活函数 $s_i(\cdot), s_j(\cdot)$ 满足下面的条件

$$\begin{cases} S_i, S_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ |S_i(u) - S_i(v)| \leq L_i |u - v|, \\ |S_j(u) - S_j(v)| \leq M_j |u - v| \\ |S_i(u)| \leq A_i < +\infty, \\ |S_j(u)| \leq B_j < +\infty \end{cases} \quad (3)$$

这里, $u, v \in \mathbf{R}, L_i > 0$ 和 $M_j > 0$ 是 Lipschitz 常数, $A_i > 0, B_j > 0$ 是常数.

对应于系统 (1) 的初始函数为

$$\begin{cases} x_i(s) = \phi_i(s), s \in [-\infty, 0] \\ y_j(s) = \varphi_j(s), s \in [-\infty, 0] \end{cases} \quad (4)$$

系统 (1) 的一个平衡点记为 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, 这里, $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T, \mathbf{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*]^T$

$$\begin{cases} x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^p (w_{ji} + w_{ji}^{\tau}) s_j(y_j^*) + I_i \right), i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ y_j^* = \frac{1}{b_j} \left(\sum_{i=1}^n (v_{ij} + v_{ij}^{\tau}) s_i(x_i^*) + J_j \right), j \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases} \quad (5)$$

定理 如果条件 (2) 和 (3) 满足并且下面的条件成立:

* 收稿日期: 2002-06-06

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (010005)

作者简介: 高潮 (1958 年生), 男, 工程博士后, 教授, E-mail: linfn@public.szptt.net.cn

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^{\tau}| \right), \quad b_j > M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^{\tau}| \right)$$

(6)

那么系统 (1) 有惟一平衡点 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix}$, 并且进而存在 $\alpha > 0$ 和 $\beta \geq 1$ 使得

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^p |y_j(t) - y_j^*| \leq \beta \exp(\alpha t) \left\{ \sum_{i=1}^n \sup_{s \in [-\infty, 0]} |x_i(s) - x_i^*| + \sum_{j=1}^p \sup_{s \in [-\infty, 0]} |y_j(s) - y_j^*| \right\}$$

(7)

证明 首先证明平衡点的存在性与惟一性, 为此, 定义下面的映射:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\theta) \\ \mathbf{G}(\theta) \end{bmatrix} \quad \theta = x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_p \in \mathbf{R}^{n+p}$$

这里, $\mathbf{F}(\theta) = [F_1(\theta), F_2(\theta), \dots, F_n(\theta)]^T$ 和 $\mathbf{G}(\theta) = [G_1(\theta), G_2(\theta), \dots, G_p(\theta)]^T$. 利用假设(2)和(3), 有

$$\begin{cases} |F_i(\theta)| \leq \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^p (|w_{ji}| + |w_{ji}^{\tau}|) B_j + |I_i| \right) \leq \gamma \\ |G_j(\theta)| \leq \frac{1}{b_j} \left(\sum_{i=1}^n (|v_{ij}| + |v_{ij}^{\tau}|) A_i + |J_j| \right) \leq \gamma \end{cases} \quad \gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$$

且
$$\begin{cases} \gamma_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^p (|w_{ji}| + |w_{ji}^{\tau}|) B_j + |I_i| \right) \right\} \\ \gamma_2 = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ \frac{1}{b_j} \left(\sum_{i=1}^n (|v_{ij}| + |v_{ij}^{\tau}|) A_i + |J_j| \right) \right\} \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in [-\gamma, \gamma]^{n+p} \Rightarrow \mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\theta) \\ \mathbf{G}(\theta) \end{bmatrix} \in [-\gamma, \gamma]^{n+p}$$

由非线性激活函数 $s(\cdot)$ 的 $s_j(\cdot)$ 的连续性, 可得到映射 $\mathbf{P}: [-\gamma, \gamma]^{n+p} \rightarrow [-\gamma, \gamma]^{n+p}$ 是连续的. 由 Brorwer's

不动点定理, 至少存在映射 $\mathbf{P}$ 的一个不动点 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix} \in [-\gamma, \gamma]^{n+p}$. 不动点 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix}$ 是系统(1)的平衡点, 平衡点

的惟一性的证明如下: 不失一般性, 如果系统(1)存在 2 个平衡点 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{v}^* \end{bmatrix}$. 注意到 $\mathbf{u}^* = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*]^T$ 和 $\mathbf{v}^* = [v_1^*, v_2^*, \dots, v_p^*]^T$, 从(2), (3), 和(5)式获得

$$\begin{cases} a_i |x_i^* - u_i^*| \leq \sum_{j=1}^p (|w_{ji}| + |w_{ji}^{\tau}|) M_j + |y_i^* - v_j^*| \\ b_j |y_j^* - v_j^*| \leq \sum_{i=1}^n (|v_{ij}| + |v_{ij}^{\tau}|) L_i + |x_i^* - u_i^*| \end{cases}$$

由(6)式推出 $x_i^* = u_i^*$ 和 $y_j^* = v_j^*$, 因而系统(1)的平衡点 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix}$ 是惟一的.

由假设(2)和(3), 从(1)式获得下面的不等式:

$$\begin{cases} \frac{d^+}{dt} |x_i(t) - x_i^*| \leq -\alpha_i |x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^p |w_{ji}| M_j |y_j(t) - y_j^*| + \sum_{j=1}^p |w_{ji}^{\tau}| M_j \int_{-\infty}^t K_{ji}(t-s) |y_j(s) - y_j^*| ds \\ \frac{d^+}{dt} |y_j(t) - y_j^*| \leq -b_j |y_j(t) - y_j^*| + \sum_{i=1}^n |v_{ij}| L_i |x_i(t) - x_i^*| + \sum_{i=1}^n |v_{ij}^{\tau}| L_i \int_{-\infty}^t N_{ji}(t-s) |x_i(s) - x_i^*| ds \end{cases}$$

(8)

这里, $t > 0$, d^+ / dt 记上右导数. 考虑函数 $\Phi_i(\cdot)$ 和 $\Gamma_j(\cdot)$, 其定义如下

$$\begin{cases} \Phi_i(\mu_i) = \alpha_i - \mu_i - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^{\tau}| \right) \int_0^{\infty} \exp(\mu_i s) N_{ij}(s) ds, \mu_i \in [0, +\infty) \\ \Gamma_j(v_j) = b_j - v_j - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^{\tau}| \right) \int_0^{\infty} \exp(v_j s) K_{ji}(s) ds, v_j \in [0, +\infty) \end{cases}$$

(9)

从条件(6), 并注意到

$$\begin{cases} \alpha_i - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^\tau| \right) \geq \rho \\ b_j - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^\tau| \right) \geq \rho \end{cases} \tag{10}$$

其中, $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$,
$$\begin{cases} \rho_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \alpha_i - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^\tau| \right) \right\} > 0 \\ \rho_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ b_j - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^\tau| \right) \right\} > 0 \end{cases}$$

从(9) 和(10) 式得到 $\Phi_i(0) \geq \rho$ 和 $\Gamma_j(0) \geq \rho, i \in \{1, 2 \cdots n\}, j \in \{1, 2 \cdots p\}$ 。对于 $\mu_i, v_j \in [0, \infty)$, 可知道 $\Phi_i(\mu_i)$ 和 $\Gamma_j(v_j)$ 是连续的, 进而 $\Phi_i(\mu_i), \Gamma_j(v_j) \rightarrow -\infty$, 如果 $\mu_i, v_j \rightarrow \infty$, 因此存在常数 $\mu_i, \tilde{v}_j \in (0, \infty)$, 使得

$$\begin{cases} \Phi_i(\mu_i) = a_i - \mu_i - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^\tau| \int_0^\infty \exp(\mu_i s) N_{ij}(s) ds \right) = 0 \\ \Gamma_j(\tilde{v}_j) = b_j - \tilde{v}_j - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^\tau| \int_0^\infty \exp(\tilde{v}_j s) K_{ji}(s) ds \right) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

选择 $\alpha = \min\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_p\}$, 显然 $\alpha > 0$, 从 (11) 式有

$$\begin{cases} \Phi_i(\alpha) = \alpha_i - \alpha - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^\tau| \int_0^\infty \exp(\alpha s) N_{ij}(s) ds \right) \geq 0 \\ \Gamma_j(\alpha) = b_j - \alpha - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^\tau| \int_0^\infty \exp(\alpha s) K_{ji}(s) ds \right) \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

相应地, 定义

$$\begin{cases} X_i(t) = \exp(\alpha t) |x_i(t) - x_i^*|, t \in [-\infty, \infty) \\ Y_j(t) = \exp(\alpha t) |y_j(t) - y_j^*|, t \in [-\infty, \infty) \end{cases} \tag{13}$$

利用 (8) 和 (13) 式可得到下面的不等式:

$$\begin{cases} \frac{d^+ X_i(t)}{dt} \leq -(\alpha_i - \alpha) X_i(t) + \sum_{j=1}^p |w_{ji}^\tau| M_j Y_j(t) + \sum_{j=1}^p |w_{ji}^\tau| M_j \int_{-\infty}^t K_{ji}(t-s) \exp(\alpha(t-s)) Y_j(s) ds \\ \frac{d^+ Y_j(t)}{dt} \leq -(b_j - \alpha) Y_j(t) + \sum_{i=1}^n |v_{ij}| L_i X_i(t) + \sum_{i=1}^n |v_{ij}^\tau| L_i \int_{-\infty}^t N_{ij}(t-s) \exp(\alpha(t-s)) X_i(s) ds \end{cases} \tag{14}$$

其中, $t > 0$, 那么构造下面的 Lyapunov 泛函:

$$\begin{aligned} V(t) = & \sum_{i=1}^n \left\{ X_i + \sum_{j=1}^p |w_{ji}^\tau| M_j \int_0^\infty \exp(\alpha s) K_{ji}(s) \left[\int_{t-s}^t Y_j(\zeta) d\zeta \right] ds \right\} + \\ & \sum_{j=1}^p \left\{ Y_j + \sum_{i=1}^n |v_{ij}^\tau| L_i \int_0^\infty \exp(\alpha s) N_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^t X_i(\zeta) d\zeta \right] ds \right\}, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

计算 $d^+ V(t) / dt$ 沿条件(14) 的变化率, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^+ V(t)}{dt} \leq & - \sum_{i=1}^n \left[a_i - \alpha - L_i \sum_{j=1}^p \left(|v_{ij}| + |v_{ij}^\tau| \int_0^\infty \exp(\alpha s) N_{ij}(s) ds \right) \right] X_i(t) - \\ & \sum_{j=1}^p \left[b_j - \alpha - M_j \sum_{i=1}^n \left(|w_{ji}| + |w_{ji}^\tau| \int_0^\infty \exp(\alpha s) K_{ji}(s) ds \right) \right] Y_j(t) \end{aligned}$$

利用式 (12), 推出 $d^+ V(t) / dt \leq 0, t > 0$, 它暗含 $V(t) \leq V(0), t > 0$ 利用这和(15) 式有

$$\sum_{i=1}^n X_i(t) + \sum_{j=1}^p Y_j(t) \leq V(t) \leq V(0), t > 0$$

然而, 从 (13) 式又有

$$\begin{aligned} V(0) = & \sum_{i=1}^n \left\{ X_i(t) + \sum_{j=1}^p |w_{ji}^\tau| M_j \int_0^\infty \exp(-\alpha s) K_{ji}(s) \left[\int_{-s}^t Y_j(\zeta) d\zeta \right] ds \right\} + \\ & \sum_{j=1}^p \left\{ Y_j(t) + \sum_{i=1}^n |v_{ij}^\tau| L_i \int_0^\infty \exp(-\alpha s) N_{ij}(s) \left[\int_{-s}^t X_i(\zeta) d\zeta \right] ds \right\} \leq \\ & \sum_{i=1}^n \left[1 + L_i \sum_{j=1}^p |v_{ij}^\tau| \int_0^\infty \exp(-\alpha s) N_{ij}(s) ds \right] \sup_{s \in (-\infty, 0)} |x_i(s) - x_i^*| + \\ & \sum_{j=1}^p \left[1 + M_j \sum_{i=1}^n |w_{ji}^\tau| \int_0^\infty \exp(-\alpha s) K_{ji}(s) ds \right] \sup_{s \in (-\infty, 0)} |y_j(s) - y_j^*| \end{aligned}$$

利用 (13) 式可获得 (7), 这里 $\beta = \max \{ \beta_1, \beta_2 \}$ 并且

$$\begin{cases} \beta_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 1 + L_i \sum_{j=1}^p |v_{ij}^\tau| \int_0^\infty s \exp(-\alpha s) N_{ij}(s) ds \right\} \geq 1 \\ \beta_2 = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ 1 + M_j \sum_{i=1}^n |w_{ji}^\tau| \int_0^\infty s \exp(-\alpha s) K_{ji}(s) ds \right\} \geq 1 \end{cases}$$

因为 $\alpha > 0$, 平衡点 $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ 是惟一并且全局指数是稳定的, 证毕。

2 结 论

本文考虑了带连续时延杂交双向联想记忆神经网络模型, 并且获得了与时延无关的全局指数稳定性的充分条件, 在证明过程中并不假设联接权的对称性, 以及激活函数的可微性与单调性。因此为杂交 BAM 神经网络的电路设计提供了更宽的选择范围, 同时全局指数稳定性可以保证网络实时完成某种计算任务。

参考文献:

[1] KOSKO B. Bidirectional associative memories[J] . IEEE Trans Syst Man Ccybemet, 1988, SMC— 18, 49— 60.
[2] KOSKO B. Adaptive bidirectional associative memories[J] . Appl Opt, 1987, 26: 4947— 4960.
[3] KOSKO B. Unsupervised learning in misel[J] . IEEE Trans Neural Networks, 1990, NN— 1, 44— 57.
[4] KOSKO B. Neural networks and fuzzy systems——A dynamical system approach to machine intelligence[M] . Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.

Global Exponential Stability in Hybrid Bi directional
Associative Memory Neural Networks

GAO Chao¹, ZHOU Shan xue²

(1. Department of Electronic Engineering, Dongguan Institute of Technology, Dongguan 523106, China;
2. Department of Electronic Engineering, Shenzhen Polytechic College, Shenzhen 518055, China)

Abstract: The dynamical characteristics of hybrid bi directional associative memory neural networks with continuous time delay are studied. Without assuming the symmetry of synaptic connection weights and the monotonicity and differentiability of activation functions, the Lyapunov functionals are constructed to derive delay independent sufficient conditions under which the networks converge exponentially to the equilibria associated with temporally uniform external inputs to the networks.

Key words: bi directional associative memory; neural networks, continuous time delay; global exponential stability