

非线性 Hill 方程的对称群^{*}

艾 军

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究一类非线性 Hill 方程, 证明了其解的对称群的全体生成元构成一个三维 Lie 代数, 并利用其对应线性 Hill 方程的基本解组得出了这个三维 Lie 代数其中一组基的表达式。

关键词: 微分方程; 对称群; Lie 代数

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2002) 06-0004-03

本文研究非线性 Hill 方程

$$u'' + Q(x)u = \frac{1}{u^3}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

其中, $Q(x)$ 是一阶连续可微的任意周期函数。当 $Q(x) \equiv 1$ 时, 方程 (1) 与各向异性仿射曲线流自相似解的研究有关^[1]。而方程 (1) 对应的线性 Hill 方程

$$u'' + Q(x)u = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

由于与 KDV 方程的周期解有联系而引起人们的注意^[2], 关于 Hill 方程的一般理论可参见文 [3]。

本文将应用 Lie 关于微分方程对称群的理论确定非线性 Hill 方程 (1) 的对称群^[4,5]。在 Lie 群理论里, 方程 (1) 的对称群是一个单参数群, 也是一族局部微分同胚

$$\tilde{x} = \Sigma_\epsilon(x, u), \quad \tilde{u} = \Phi_\epsilon(x, u)$$

满足, $x = \Sigma_0(x, u)$ 和 $u = \Phi_0(x, u)$ 且保持方程 (1) 的解集合不变。向量场

$$v = \zeta(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

其中,
$$\zeta(x, u) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Sigma_\epsilon(x, u)$$

$$\phi(x, u) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Phi_\epsilon(x, u)$$

是单参数群的无穷小对称。为找出方程 (1) 的所有群不变解, 首先要确定无穷小对称的 Lie 代数。

引理 1 方程 (1) 的对称群的全体生成元构成一个三维的 Lie 代数, 由如下 3 个向量场张成

$$v_j = 2\alpha_j \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_j' u \frac{\partial}{\partial u}, \quad j = 1, 2, 3$$

其中, α_1, α_2 和 α_3 是三阶线性常微分方程

$$\alpha''' + 4Q\alpha' + 2Q'\alpha = 0 \quad (3)$$

的 3 个线性无关解。

证明 方程 (1) 的无穷小对称的生成元是 (x, u) 空间的一个向量场, 其一般形式为

$$v = \zeta(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

要确定适当的系数 ζ 和 ϕ 以生成无穷小对称。设

$$\Delta[u] = u_{xx} + Q(x)u - u^{-3}$$

由对称群的理论^[4], v 生成 (1) 的对称群的充要条件是

$$\text{pr}^{(2)} v(\Delta[u]) = 0, \quad \Delta[u] = 0 \quad (4)$$

其中, $\text{pr}^{(2)} v$ 是向量场 v 在射流空间 (x, u) 上的二阶延拓向量场, 且有

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(2)} v(\Delta[u]) &= \\ v(\Delta[u]) + \phi^x \partial_u(\Delta[u]) + \phi^{xx} \partial_{xx}(\Delta[u]) &= \\ v(\Delta[u]) + \phi^{xx} \partial_{xx}(\Delta[u]) = v(\Delta[u]) + \phi^{xx} \end{aligned}$$

而由向量场的延拓公式, 记 D 为全导数算子, 则

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D_{xx}(\phi - \zeta u_x) + \zeta u_{xxx} = \\ \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \zeta_{xx})u_x + (\phi_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 - \\ &\quad \zeta_{uu}u_x^3 + (\phi_u - 2\zeta_x)u_{xx} - 3\zeta_u u_x u_{xx} \end{aligned}$$

因此, 在 $\Delta[u] = 0$ 上用公式 (4), 并利用

$$u_{xx} = -Qu + u^{-3}$$

消去等式中的 u_{xx} 项, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \text{pr}^{(2)} v(\Delta[u]) = v(\Delta[u]) + \phi^{xx} = \\ \zeta Q'u + \phi Q + 3\phi u^{-4} + \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \zeta_{xx})u_x + \\ &\quad (\phi_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 - \zeta_{uu}u_x^3 + \\ &\quad (\phi_u - 2\zeta_x)(u^{-3} - Qu) - 3\zeta_u u_x(u^{-3} - Qu) \end{aligned}$$

首先观察 u_x^3, u_x^2 和 $u_x u^{-3}$ 项, 可知 $\zeta_u = 0$, 且 $\phi_{uu} = 0$, 故断言

$$\zeta(x, u) = \zeta(x)$$

* 收稿日期: 2002-05-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171112)

作者简介: 艾军 (1955 年生), 男, 副教授; E-mail: mcszhy@zsu.edu.cn

$$\phi(x, u) = A(x)u + B(x)$$

其中, A 和 B 是待定函数。令 u_x 项前面系数为零, 即 $2\phi_{xu} - \zeta_{xx} = 0$, 或

$$\zeta_x = 2\phi_u + C = 2A(x) + C$$

其中, C 是常数。因此方程 (4) 化简为

$$\phi_{xx} + (\phi_u - 2\zeta_x)(u^{-3} - Qu) + \phi Q + \zeta Q'u + 3\phi u^{-4} = 0$$

或

$$(A''u + B'') - (3A + 2C)(u^{-3} - Qu) + (Au + B)Q + \zeta Q'u + \frac{3Au + 3B}{u^4} = 0$$

再令 u^{-3} 项前面系数为 0, 故 $C = 0$, 令 u^{-4} 项前面系数为 0, 故 $B(x) = 0$, 因此

$$\phi = \phi(x, u) = A(x)u, \quad \zeta_x = 2A(x)$$

而方程 (4) 化简为

$$A''u + 4AQ_u + \zeta Q'u = 0$$

$$\text{或} \quad A'' + 4AQ + \zeta Q' = 0$$

$$\text{设} \quad \alpha = \int_{x_0}^x A(t) dt$$

其中, x_0 是常数, 则

$$\alpha' = A(x) = \frac{1}{2}\zeta_x$$

至此确定了

$$\phi = \alpha' u, \quad \zeta = 2\alpha$$

注意到方程 (5) 可写为

$$\alpha''' + 4Q\alpha' + 2Q'\alpha = 0$$

这是一个三阶线性常微分方程, 设 α_1, α_2 和 α_3 是该方程的 3 个线性无关解, 则其通解为

$$\alpha = \sum_{j=1}^3 C_j \alpha_j$$

因此, 方程 (1) 的无穷小对称有一个三维的 Lie 代数, 生成元为

$$v_j = 2\alpha_j \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_j' u \frac{\partial}{\partial u}, \quad j = 1, 2, 3$$

分别用 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 表示方程 (2) 满足条件

$$\phi_1(0) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0,$$

$$\phi_2(0) = 0, \quad \phi_2'(0) = 1$$

的解。 $\{\phi_1, \phi_2\}$ 称为方程 (2) 的基本解组。

引理 2 设 $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$ 是线性 Hill 方程 (2) 的基本解组, 则

$$\alpha = \phi_1 \phi_2, \quad \beta = \phi_i^2, \quad i = 1, 2$$

都满足三阶线性常微分方程 (3)。

证明 利用

$$\alpha' = \phi_1' \phi_2 + \phi_1 \phi_2'$$

$$\alpha'' = \phi_1'' \phi_2 + 2\phi_1' \phi_2' + \phi_1 \phi_2''$$

$$\alpha''' = \phi_1''' \phi_2 + 3\phi_1'' \phi_2' + 3\phi_1' \phi_2'' + \phi_1 \phi_2'''$$

$$\beta' = 2\phi_i \phi_i'$$

$$\beta'' = 2\phi_i \phi_i'' + 2(\phi_i')^2$$

$$\beta''' = 2\phi_i \phi_i''' + 6\phi_i' \phi_i''$$

注意到对于 $i = 1, 2$, 有

$$\phi_i'' = -Q\phi_i, \quad \phi_i''' + Q\phi_i' + Q'\phi_i = 0$$

$$\text{故} \quad \alpha''' + 4Q\alpha' + 2Q'\alpha =$$

$$-(Q\phi_1' + Q'\phi_1)\phi_2 - 3Q\phi_1\phi_2' - 3Q\phi_2\phi_1' - (Q\phi_2' + Q'\phi_2)\phi_1 + 4Q(\phi_1'\phi_2 + \phi_2'\phi_1) + 2Q'\phi_1\phi_2 = 0$$

且

$$\beta''' + 4Q\beta' + 2Q'\beta = 2\phi_i(-Q\phi_i' - Q'\phi_i) + 6\phi_i'(-Q\phi_i) + 8Q\phi_i\phi_i' + 2Q'\phi_i^2 = 0$$

设 $\{\phi_1, \phi_2\}$ 为方程 (2) 的基本解组, 记

$$\alpha_0 = \phi_1^2 + \phi_2^2$$

$$\alpha_1 = \phi_1^2 - \phi_2^2 \quad (7)$$

$$\alpha_2 = 2\phi_1\phi_2$$

由引理 2, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 是方程 (3) 的 3 个解, 且显然是线性无关的。因此, 由引理 1 和引理 2, 得到以下定理。

定理 非线性 Hill 方程 (1) 的对称群的全生成元构成一个三维 Lie 代数。

设 $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$ 是线性 Hill 方程 (2) 的基本解组, 且 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 如 (7) 式定义, 则这个 Lie 代数的一组基可以表达为:

$$\left\{ 2\alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i'(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 0, 1, 2 \right\}$$

致谢: 衷心感谢香港中文大学数学系曹启升教授的指导。

参考文献:

- [1] AI J, CHOU K S, WEI J C. Self-similar solutions for the anisotropic affine curve shortening problem[J]. Calc Var, 2001, 13: 311—337.
- [2] McKEAN H P, TRUBOWITZ E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points[J]. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 143—226.
- [3] MAGNUS W, WINKLER S. Hill's equation[M]. New York: Dover Publications INC, 1979.
- [4] OLVER P L. Applications of Lie groups to differential equations[M]. Second ed, New York: Springer-Verlag, 1993.
- [5] IBRAGIMOV N H. Lie group analysis of differential equations [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

(下转第 9 页)

参考文献:

[1] 吴立德. 计算机视觉[M] . 上海: 复旦大学出版社, 1993: 12— 20.

[2] MALLAT S, HUANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J] . IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38: 617— 643.

[3] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M. Wavelets theory and its application to pattern recognition[M] . Singapore: World Scientific Press, 2000: 179— 220.

[4] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M. Characterization of dirac-structure edges with wavelet transform[J] . IEEE Trans Sys Man Cyb, 2000, 30(B) : 93— 109.

Computation of Image Gradient and Divergence and Their Application to Edge Detection of Noisy Images

YANG Zhao xia, LU Feng, LI Yue sheng

(Department of Scientific Computation and Computer Application,
Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Gradient and divergence are introduced into image analysis. Based on the integral definition of gradient and divergence, an easier approximate discrete expression of them is presented, which is independent of the coordinate. Furthermore, the gradient and divergence are applied to edge detection of noisy images. Corresponding experiments are also given.

Key words: gradient; divergence; noisy image; edge; threshold

(上接第 5 页)

The Symmetric Groups of a Class of Nonlinear Hill's Equations

AI Jun

(Department of Mathematics, Sun Yat sen(Zhongshan) University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A class of nonlinear Hill's equations which arises from the study of the generalized curve shortening problem is discussed. A result that the solution set of the equation admitting a three dimensional Lie algebra of infinitesimal symmetries is obtained. The basis of this algebra is also given in the following form

$$\left\{ 2\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i'(x)u\frac{\partial}{\partial u}, i = 0, 1, 2 \right\}$$

Key words: differential equations; symmetric groups; Lie algebra