

关于 g -上鞅的上穿不等式和强 g -上鞅 (II)^{*}

司徒荣, 杨 艳
(中山大学统计系, 广东 广州 510275)

摘 要: 继续研究了 g -上鞅的收敛定理, 右连续修正以及其他性质, 得出 g -上鞅的右连续修正样本是强 g -上鞅. 文章的讨论与结果在连续的情形已证实可应用于 g -上鞅的非线性 Doob-Meyer 分解的讨论, 及不完全金融市场的期权定价及经济理论的效用函数的讨论中. 因此, 在带跳情形, 也将可有类似应用.

关键词: 带跳倒向随机微分方程 (BSDE); 强 g -上鞅; Girsanov 定理; Ito 公式; Gronwall 不等式

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 06-0001-03

本文所有的概念与记号将沿用文 [1] .

引理 1 若 $X_n, X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 且 $E|X_n - X|^2 \rightarrow 0$, 则有 $E|\epsilon_g(X_n | \mathcal{F}_t) - \epsilon_g(X | \mathcal{F}_t)|^2 \rightarrow 0$, 特别地有: $|\epsilon_g(X_n) - \epsilon_g(X)| \rightarrow 0$.

证明 考虑下面的带跳 BSDE:

$$\begin{aligned} x_t^n &= X_n + \int_t^\infty g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) ds - \\ &\quad \int_t^\infty q_s^n dw_s - \int_t^\infty \int_Z p_s^n(z) \tilde{N}_k(ds, dz) \\ x_t &= X + \int_t^\infty g(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \\ &\quad \int_t^\infty q_s dw_s - \int_t^\infty \int_Z p_s(z) \tilde{N}_k(ds, dz) \end{aligned}$$

对 $|x_t^n - x_t|^2$ 应用 Ito 公式得:

$$\begin{aligned} E \left[|x_t^n - x_t|^2 + \int_t^\infty |q_s^n - q_s|^2 ds + \right. \\ \left. \int_t^\infty \int_Z \|p_s^n(z) - p_s(z)\|^2 ds \right] \leq \\ E \left[|X_n - X|^2 + \int_t^\infty 2(g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - \right. \\ \left. g(s, x_s, q_s, \omega))(x_s^n - x_s) ds \right] \end{aligned}$$

由 Lipschitz 条件和 Gronwall 不等式可推出

$$\begin{aligned} E \left[|x_t^n - x_t|^2 + \frac{1}{2} \left(\int_t^\infty |q_s^n - q_s|^2 ds + \right. \right. \\ \left. \left. \int_t^\infty \|p_s^n - p_s\|^2 ds \right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即得:

$$E|\epsilon_g(X_n | \mathcal{F}_t) - \epsilon_g(X | \mathcal{F}_t)|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

特别地, 令 $t=0$, 可得:

$$|\epsilon_g(X_n) - \epsilon_g(X)| \rightarrow 0.$$

引理 2 若 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 则存在常数 $C >$

0, 满足 $(\epsilon_g[|\xi|])^2 \leq CE|\xi|^2$.

终值给出的倒向随机微分方程的解在零时刻的值显然是确定的, 且根据文[1] 中 § 2 的证明知其也是可被估计的. 特别, 可通过 Girsanov 变换将 g -期望看成是新概率测度下的普通数学期望, 故上述引理显然成立, 证明略去.

定理 1 若 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是 g -上鞅, 满足 $E \sup_{t \geq 0} |X_t|^2 < \infty$, 则 $X_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ 几乎处处存在, 且 $X_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. 并且, 对 $\forall t \in [0, \infty]$, 有: $\epsilon_g[X_\infty | \mathcal{F}_t] \leq X_t, a.s.$

证明 设 Q 为有理数集, $a, b \in Q$, 满足 $a < b, \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ 是 $\mathbf{R}_+$ 中严格增时间序列. $\cup_a^b(X, n)$ 为 $\{X_{t_i}\}_{i=1}^n$ 在时间 t_n 之前上穿 $[a, b]$ 的次数. $\cup_a^b(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \cup_a^b(X, n)$. 因为 $\left\{ I_{\{\cup_a^b(X, n) > k\}} \right\}_{n \geq 0}$

是有界增序列, 由引理 1、2 和文[1] 定理 3 可得

$$\begin{aligned} \epsilon^{-v, -|C|} \left[I_{\{\cup_a^b(X) > k\}} \right] &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{-v, -|C|} \left[I_{\{\cup_a^b(X, n) > k\}} \right] &\leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{-v, -|C|} \left[\frac{1}{k} \cup_a^b(X, n) \right] &\leq \\ \frac{c}{k(b-a)} \sup_{n \geq 0} \epsilon^{v, |C|} \left[(X_{t_n} - a)^- \right] &\leq \\ \frac{c}{k(b-a)} (a^+ + \sup_{n \geq 0} \epsilon^{v, |C|} [X_{t_n}^-]) &= \\ \frac{c}{k(b-a)} \left\{ a^+ + \left[\left(\sup_{n \geq 0} \epsilon^{v, |C|} [X_{t_n}^-] \right)^2 \right]^{1/2} \right\} &\leq \\ \frac{c}{k(b-a)} \left[a^+ + (C \sup_{n \geq 0} E|X_{t_n}|^2)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2003-05-26

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (79790130)

作者简介: 司徒荣 (1935 年生), 男, 教授, 博士生导师; E-mail: mcsstr@zsu.edu.cn

令 $k \rightarrow \infty$, 可得:

$$\epsilon^{-v, -|c|} [I(\cup_a^b(X) = \infty)] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c}{k(b-a)}.$$

$$[a^+ + (C \sup_{n \geq 0} E |X_n|^2)^{1/2}] = 0$$

故,

$$P(\{\cup_a^b(X) = \infty\}) = 0, \forall a < b$$

即,

$$P(\cup_{a < b, a, b \in \mathcal{Q}} \{\omega: \cup_a^b(X)(\omega) = \infty\}) = 0$$

因为

$$H := \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) < \{\omega: \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\} =$$

$$\cup_{a < b, a, b \in \mathcal{Q}} \{\omega: \cup_a^b(X)(\omega) = \infty\}$$

所以, $P(H) = 0$, 即 $\{X_n\}$ 的极限几乎处处存在。

设

$$X_\infty = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega), & \omega \notin H \\ 0, & \omega \in H \end{cases}$$

则 $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ 几乎处处存在。故

$$E |X_\infty|^2 = E \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|^2 \leq$$

$$E \sup_{n \geq 0} |X_n|^2 < \infty$$

所以, $X_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

又因为 $\{X_t\}$ 是 g -上鞅, 由定义知其满足: 当 $0 \leq t \leq t_j$ 时, 有

$$x_t = X_{t_j} + \int_t^{t_j} g(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds -$$

$$\int_t^{t_j} q_s dw_s - \int_t^{t_j} \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) \mathbb{L}KN \sim \mathbb{L}(ds, dz) \quad (1)$$

且 $\epsilon_g[X_{t_j} | \mathcal{F}_t] = x_t \leq X_t$, 令

$$g(s, x_s, q_s, p_s, \omega) = \begin{cases} g(s, x_s, q_s, p_s, \omega), & s \in (t, t_j] \\ g(s, x_s, 0, 0, \omega), & s \in (t_j, \infty] \end{cases}$$

则式 (1) 与下式等价:

$$x_t = X_{t_j} + \int_t^\infty g(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds -$$

$$\int_t^\infty q_s dw_s - \int_t^\infty \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds, dz) \quad (2)$$

因为 $E|X_{t_j} - X_\infty|^2 \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, 在 (2) 式两端分别取极限, 由引理 1 得:

$$\epsilon_g[X_\infty | \mathcal{F}_t] = x_t \leq X_t, \text{ a.s.}$$

定理 2 (g -上鞅的右连续修正) 设 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为 g -上鞅, 且满足 $E \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 < \infty, \forall T > 0$,

则有:

(a) 令 $X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t+\frac{1}{n}}$, 则 X_t 为 g -上鞅

(b) $X_t \leq X_t, P$ -a.s.

(c) $E X_t$ 右连续 $\Leftrightarrow X_t = X_t$.

证明 (a) 因为

$$|X_{t+\frac{1}{n}}|^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2$$

且 $E \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 < \infty, X_{t+\frac{1}{n}} \rightarrow X_t$

由 Lebesgue 控制收敛定理得,

$$E |X_t - X_{t+\frac{1}{n}}|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

故由引理 1 得:

$$\forall 0 \leq r \leq t \leq T, \forall A \in \mathcal{F}_r,$$

有

$$\epsilon_g(IAX_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_g(IAX_{t+\frac{1}{n}})$$

又因为 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为 g -上鞅, 故当 $0 \leq r \leq t$, 有

$$\epsilon_g(IAX_{t+\frac{1}{n}}) \leq \epsilon_g(IAX_{r+\frac{1}{n}})$$

两边取极限得: 当 $0 \leq r \leq t$, 有

$$\epsilon_g(IAX_t) \leq \epsilon_g(IAX_r)$$

即 X_t 为 g -上鞅。

(b) 由 (a) 已证得:

$$\forall A \in \mathcal{F}_t, \epsilon_g(X_t I_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_g(X_{t+\frac{1}{n}} I_A)$$

又因为 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 为 g -上鞅, 故

$$\epsilon_g(X_{t+\frac{1}{n}} I_A) \leq \epsilon_g(X_t I_A)$$

两边取极限得:

$$\epsilon_g(X_t I_A) \leq \epsilon_g(X_t I_A) \quad (3)$$

故 $X_t \leq X_t, P$ -a.s. 否则, 令 $A = \{X_t > X_t\}$,

$P(A) > 0$, 由文 [1] 中推论 2 得

$$P(\epsilon_g(X_t I_A) > \epsilon_g(X_t I_A)) > 0$$

与 (3) 式矛盾。

(c)

$$E(X_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{t+\frac{1}{n}})$$

$$\Leftrightarrow E(X_t) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} E X_{t+\frac{1}{n}})$$

$$\Leftrightarrow E(X_t) = E(X_t) \Leftrightarrow X_t = X_t, P$$
-a.s.

以后只讨论 $E X_t$ 为右连续的 g -上鞅。

由 BSDE 的解的惟一性容易得: g -鞅是强 g -鞅, 下面我们证明这个结论对 g -上鞅的右连续修正样本同样成立。

定理 3 若 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是 g -上鞅, 那么它的右连续修正样本是强 g -上鞅。

证明 令 $X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t+\frac{1}{n}}$, 由定理 2 知 $\{X_t\}$ 也是 g -上鞅。取有界停时 σ, τ , 满足 $\sigma \leq \tau$ 。定义 $\sigma_n = \frac{i+1}{2^n}$, 当 $\sigma \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$, 则 $\sigma_n \downarrow \sigma$ 。同样定义 τ_n , 得 $\tau_n \downarrow \tau$ 。考虑下面的带跳 BSDEs:

$$x_t^n = X_{\tau_n} + \int_{t \wedge \tau_n}^{\tau_n} g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n) ds -$$

$$\int_{t \wedge \tau_n}^{\tau_n} q_s^n dw_s - \int_{t \wedge \tau_n}^{\tau_n} \int_{\mathcal{Z}} p_s^n(z) N_k(ds, dz)$$

$$x_t = X_\tau + \int_{t \wedge \tau}^\tau g(s, x_s, q_s, p_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^\tau \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz)$$

由解的惟一性和条件 (A2) (见文 [1]) 知它们也满足方程:

$$\begin{aligned} x_t^n &= X_\tau^n + \int_{t \wedge \tau}^\tau g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n) ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau q_s^n dw_s - \int_{t \wedge \tau}^\tau \int_Z p_s^n(z) N_k(ds, dz) \\ x_t &= X_\tau + \int_{t \wedge \tau}^\tau g(s, x_s, q_s, p_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^\tau \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \end{aligned}$$

因为 X_t 是 g -上鞅, 可得 $\forall n, x_\sigma^n \leq X_\sigma$ 。

对 $|x_t^n - x_t|^2$ 用 Ito 公式得:

$$\begin{aligned} E[|x_t^n - x_t|^2] &+ \int_{t \wedge \tau}^\tau |q_s^n - q_s|^2 ds + \int_{t \wedge \tau}^\tau \|p_s^n - p_s\|^2 ds \leq \\ E[|X_\tau^n - X_\tau|^2] &+ 2 \int_{t \wedge \tau}^\tau |x_s^n - x_s| \cdot |g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n) - g(s, x_s, q_s, p_s)| ds \end{aligned}$$

故由 Lipschitz 条件和 Gronwall 不等式可推出:

$\forall t$, 当 $n \rightarrow \infty$,

$$E\left[|x_t^n - x_t|^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{t \wedge \tau}^\tau |q_s^n - q_s|^2 ds + \int_{t \wedge \tau}^\tau \|p_s^n - p_s\|^2 ds \right) \right] \rightarrow 0$$

特别地有,

$$E\left[|x_t^n - x_t|^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{t \wedge \tau}^\tau |q_s^n - q_s|^2 ds + \int_{t \wedge \tau}^\tau \|p_s^n - p_s\|^2 ds \right) \right] \rightarrow 0$$

再考虑下面的 FSDEs:

$$\begin{aligned} x_t^n &= x_0^n - \int_0^t g(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n) ds + \int_0^t q_s^n dw_s + \int_0^t \int_Z p_s^n(z) N_k(ds, dz) \\ x_t &= x_0 - \int_0^t g(s, x_s, q_s, p_s) ds + \int_0^t q_s dw_s + \int_0^t \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \end{aligned}$$

对 $|x_t^n - x_t|^2$ 应用 Ito 公式, 再用鞅不等式可以证得:

$$E \sup_{0 \leq s \leq \tau} |x_t^n - x_t|^2 \rightarrow 0$$

故 $E|x_\sigma^n - x_\sigma|^2 \rightarrow 0$

又因为, $|x_\sigma^n - x_\sigma|^2 \leq$

$$2|x_\sigma^n - x_\sigma^n|^2 + 2|x_\sigma^n - x_\sigma|^2$$

所以 $E|x_\sigma^n - x_\sigma|^2 \rightarrow 0$

对 $x_\sigma^n \leq X_\sigma$ 两边取极限得: $x_\sigma \leq X_\sigma$,

即 X_t 是强 g -上鞅。

参考文献:

[1] 司徒荣, 杨艳. 关于 g -上鞅的上穿不等式和强 g -上鞅 (I) [J] . 中山大学学报(自然科学版), 2003, 42(5) : 1—5.
[2] 严加安, 彭实戈, 方诗赞, 等. 随机分析选讲[M] . 北京: 科学出版社, 1997.
[3] PENG S G. Monotone limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type[J] . Probab Theory Relat Fields, 1999, 113: 473—499.
[4] CHEN Z J, PENG S G. A general downcrossing inequality for g -martingales[J] . Statistics Prob Letters, 2000, 46, 169—175.
[5] SITU Rong. Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications[M] . 广州: 广东科技出版社, 2000.

On Upcrossing Inequality for g Supermartingale and Strong g Supermartingale (II)

SITU Rong, YANG Yan

(Department of Statistics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: This paper goes on improving the Convergence Theorem, the right continuous modification and other properties of g martingale. It also shows that the right continuous modification of any g supermartingale is a strong g -supermartingale. What the paper introduced in the case of continuity has been proved that it can be applied to the discussions for g supermartingale of the nonlinear Doob Meyer decomposition, to the contingent claims pricing in the incomplete markets and to the utility functions in economic theory. So that it will have the same applications in the case with jumps.

Key words: Backward stochastic differential equation (BSDE) with jumps; strong g supermartingale; Girsanov theorem; Ito's fomula; Gronwall's inequality