

一类微分方程的约化及其约化方程的 Painlevé 分析*

杨志林

(合肥工业大学理学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 对一类非线性偏微分方程组进行行波约化和相似约化, 使原来的偏微分方程约化为常微分方程, 并对此常微分方程进行 Painlevé 分析, 进一步给出此类非线性偏微分方程约化后的常微分方程组只有“弱” Painlevé 性质, 还给出微分方程具有“弱” Painlevé 性质的一个例证。

关键词: Painlevé 性质; 弱 Painlevé 性质; 约化; 共振点

中图分类号: O29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 02-0115-03

1 问题提出

早期 Painlevé 及其合作者们研究常微分方程的 Painlevé 性质^[1-2], 若常微分方程解的可动奇异点是极点, 则称其方程具有 Painlevé 性质, 即设常微分方程

$$F(u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (1)$$

$$\varphi = \varphi(x) = 0 \quad (2)$$

φ 为奇异流形, 令方程 (1) 解为

$$u = u(x) \varphi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j(xt) \varphi^j \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (1) 并适当地化简和计算, 如果满足下列条件: ① α 是整数; ② $\varphi(x), u_j(x), u_0 \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots$, 在式 (2) 的某邻域内解析; ③ 将式 (3) 代入式 (1) 得到有关 u_j 递推关系公式是相容的, 那么式 (1) 有 Laurent 级数解, 且解关于式 (2) 奇异流形是单值的, 则称式 (1) 具有 Painlevé 性质。

后来文 [3, 4] 提出了 Painlevé 推测: 若偏微分方程经过约化得到的所有常微分方程具有 Painlevé 性质, 那么该偏微分方程可积, 而且文 [3, 4] 对其推测给出部分证明, 随着人们对方程可积性的探讨深入, 文 [5, 6] 对 Painlevé 的推测给予修正, 若偏微分方程经过约化得到的所有常微分方程具有“弱” Painlevé 性质——常微分方程的 Laurent 级数解首项为 $(t - t_0)^{\alpha/r}$, α, r 为整数, 那么这偏微分方程可积。

本文主要考虑可积的偏微分方程

$$u_t = DLu \quad (4)$$

其中,

$$u = [u_0, u_1, \dots, u_{m-1}]^T,$$

令

$$u_j(x, t) = U_j(x - ct)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & J_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & J_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & J_{m-1} \end{bmatrix};$$

$$J_0 = \frac{1}{4} D^2 + u_0 - \frac{1}{2} D^{-1} u_{0x};$$

$$J_i = u_i - \frac{1}{2} D^{-1} u_{ix} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1);$$

$$D = \frac{d}{dx}$$

(4) 式的行波约化和相似约化, 并对约化后的常微分方程讨论其 Painlevé 性质, 发现此常微分方程只有“弱”的 Painlevé 性质, 阐明了对 Painlevé 推测修正的必要性, 同时也给出可积常微分方程只有“弱” Painlevé 性质的一个例证。

2 行波约化

(4) 式改写为

$$\begin{bmatrix} u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-2}, u_{m-1} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} u_{m-1, xxx} + \frac{1}{2} u_{0x} u_{m-1} + u_0 u_{m-1, x} \\ u_{0x} + \frac{1}{2} u_{1x} u_{m-1} + u_1 u_{m-1, x} \\ u_{1x} + \frac{1}{2} u_{2x} u_{m-1} + u_2 u_{m-1, x} \\ \dots\dots\dots \\ u_{m-3, x} + \frac{1}{2} u_{m-2x} u_{m-1} + u_{m-2} u_{m-1, x} \\ u_{m-2, x} + \frac{3}{2} u_{m-1} u_{m-1, x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

* 收稿日期: 2002-09-18

作者简介: 杨志林 (1962 年生), 男, 硕士, 讲师; E-mail: yzl6211@yahoo.com.cn

c 为常数, $j = 0, 1, \dots, m-1$

将 $u_j(x, t) = U_j(x - ct)$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) 代入

(5) 式, (5) 式约化为

$$-c[U'_0, U'_1, \dots, U'_j, \dots, U'_{m-2}, U'_{m-1}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}U''_{m-1} + \frac{1}{2}U'_0U_{m-1} + U_0U'_{m-1} \\ U'_0 + \frac{1}{2}U'_1U_{m-1} + U_1U'_{m-1} \\ \dots\dots\dots \\ U'_{j-1} + \frac{1}{2}U'_jU_{m-1} + U_jU'_{m-1} \\ \dots\dots\dots \\ U'_{m-3} + \frac{1}{2}U'_{m-2}U_{m-1} + U_{m-2}U'_{m-1} \\ U'_{m-2} + \frac{3}{2}U_{m-1}U'_{m-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

由 (6) 式知:

$$-cU'_j = U'_{j-1} + \frac{1}{2}U'_jU_{m-1} + U_jU'_{m-1} \\ j = 1, 2, \dots, m-1$$

对 (6) 式自下而上依次计算直到顺数第 2 方程得到 U_0 可设:

$$U_0 = a_{m-1} + a_{m-2}U_{m-1} + a_{m-3}U_{m-1}^2 + \dots + a_1U_{m-1}^{m-2} + b_0U_{m-1}^{m-1} + b_1U_{m-1}^m \quad (7)$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ 为任意常数, b_0, b_1 为常数。

将 (7) 式代入 (6) 式第一方程得

$$\frac{1}{4}U''_{m-1} + [(a_{m-1} + ca_{m-2}) + \left(\frac{3}{2}a_{m-2} + 2ca_{m-3}\right)U_{m-1} + \dots + \left(\frac{1}{2}ma_1 + (m-1)cb_0\right)U_{m-1}^{m-2} + \left(\frac{1}{2}(m+1)b_0 + cmb_1\right)U_{m-1}^{m-1} + \frac{1}{2}(m+1)bU_{m-1}^m]U'_{m-1} = 0$$

对此等式积分一次得

$$\frac{1}{4}U'_{m-1} + (a_{m-1} + ca_{m-2})U_{m-1} + \left(\frac{3}{4}a_{m-2} + ca_{m-3}\right)U_{m-1}^2 + \dots + \left(\frac{m+1}{2m}b_0 + cb_1\right)U_{m-1}^m + \frac{b_1}{2}U_{m-1}^{m+1} + a_m = 0$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为任意常数, c, b_0, b_1 为常数。

对此式方程两边同乘以 U'_{m-1} , 再积分一次得

$$\frac{1}{8}(U'_{m-1})^2 + a_{m+1} + a_mU_{m-1} + \frac{1}{2}(a_{m-1} + ca_{m-2})U_{m-1}^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{b_0}{2m} + \frac{cb_1}{m+1}\right)U_{m-1}^{m+1} + \frac{b_1}{2(m+2)}U_{m-1}^{m+2} = 0 \quad (8)$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 为任意常数; c, b_0, b_1 为常数。下面对 (8) 式方程作 Painlevé 分析, 令

$$U_{m-1} \sim U_{m-1,0}(z - z_0)^{\alpha}$$

把 $U_{m-1} \sim U_{m-1,0}(z - z_0)^{\alpha}$ 代入 (8) 式, 比较方程的两边最低次幂得到

$$\alpha = \frac{-2}{m}, \quad U_{m-1,0} = -\frac{m+2}{m^2b_1}$$

设

$$U_{m-1} = \sum_{j=0}^{\infty} U_{m-1,j}(z - z_0)^{j-2/m} \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (8) 式比较方程两边同次幂系数得到:

$$\frac{1}{8} \sum_{l=0}^j \left(l - \frac{2}{m}\right) \left(j - \frac{2}{m} - l\right) U_{m-1,l} \cdot U_{m-1,j-l} + \frac{b_1}{2(m+2)} \sum_{l_1=0}^j \sum_{l_2=0}^{j-l_1} \dots \sum_{l_m=0}^{j-\sum_{i=1}^{m-1} l_i} \sum_{l_{m+1}=0}^{j-\sum_{i=1}^m l_i} U_{m-1,l_1} \dots U_{m-1,l_{m+1}} \cdot U_{m-1,j-\sum_{i=1}^{m+1} l_i} \triangleq \bar{F}(U_{m-1,0}, \dots, U_{m-1,j-1}, z_0, z, a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$$

经整理得

$$-\frac{1}{2m}(j+1)U_{m-1,j} = F(U_{m-1,0}, U_{m-1,1}, \dots, U_{m-1,j-1}, z_0, z, a_1, a_2, \dots, a_{m+1}) \quad (10)$$

$j = -1$ 为 (8) 式方程共振点, z_0 为任意常数, (8) 式为一阶方程有一个任意常数, 由 (10) 式知, 方程 (8) 具有弱 Painlevé 性质, 特别 $m = 2, \alpha = -1$, 具有 Painlevé 性质。

3 相似约化

在 (4) 式中令 $m = 2$ 得

$$\begin{cases} u_{0t} = \frac{1}{4}u_{1xx} + \frac{1}{2}u_{0x}u_1 + u_0u_{1x} \\ u_{1t} = u_{0x} + \frac{3}{2}u_1u_{1x} \end{cases} \quad (11)$$

令 $\xi = \frac{x}{(2t)^{1/2}}, u_0 = \frac{U_0(\xi)}{2t}, u_1 = \frac{U_1(\xi)}{(2t)^{1/2}}$

代入 (11) 式并化简得

$$\begin{cases} U_0 + \frac{3}{4}U_1^2 + \xi U_1 + b_1 = 0 \\ \frac{1}{4}U''_1 - \frac{3}{2}U_1^2U'_1 - 3\xi U_1U'_1 - 2U_1^2 - (b_1 + \xi)U'_1 - 3\xi U_1 - 2b_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中, b_1 为任意常数。

下面对式 (13) 式进行 Painlevé 分析: 令

$$U_1 \sim \bar{u}_0(\xi - \xi_0)^{\alpha}$$

并代入式 (13) 式比较两边同最低次幂得

$$\alpha = -1, \quad \bar{u}_0^2 = 1$$

设

$$U_1 = \sum \bar{u}_j (\xi - \xi_0)^{j-1} \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (13) 式且比较其方程两边同次幂系数得

$$(j+1)(j-3)(j-4)\bar{u}_j \triangleq 4G(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{j-1}, b_1, \xi_0, \xi) \quad (15)$$

$j = -1, 3, 4$ 为共振点, 其中

$$\begin{aligned} G = & \frac{3}{2} \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{l=1}^m (j-m-1) \bar{u}_l \bar{u}_{m-l} \bar{u}_{j-m} + \\ & 3 \sum_{l=0}^{j-2} (j-l-3) \bar{u}_l \bar{u}_{j-l-2} + \\ & 3\xi_0 \sum_{l=1}^{j-1} (j-l-2) \bar{u}_l \bar{u}_{j-l-1} + 2 \sum_{l=0}^{j-2} \bar{u}_l \bar{u}_{j-l-2} + \\ & (j-3)(b_1 + \xi_0^2) \bar{u}_{j-2} + (j-5) \bar{u}_{j-2} + \\ & 2\xi_0(j-4) \bar{u}_{j-3} + 3\bar{u}_{j-4} + 3\xi_0 \bar{u}_{j-3} \end{aligned} \quad (16)$$

由 (15)、(16) 两式得

$$j = 0, \bar{u}_0^2 = 1 \text{ 取 } \bar{u}_0 = 1, j = 1, \bar{u}_1 = -\xi_0$$

$$j = 2, \bar{u}_2 = \frac{1}{3}(\xi_0^2 - 2b_1 - 2)$$

$j = 3$, 利用 $j = 0$ 式可知, (15) 式方程两边相等, 所以 $\bar{u}_3$ 为任意函数

$j = 4$, 利用 $j = 0, j = 2$ 式可知, (15) 式方程两边相等, 所以 $\bar{u}_4$ 为任意函数

$$j \geq 5, \bar{u}_j = \frac{4G}{(j+1)(j-3)(j-4)}$$

(13) 式三阶方程有 3 个任意函数, 因此 (13) 式具有 Painlevé 性质。

综上所述, 对 (4) 式行波约化后得到的常微分方程只有弱的 Painlevé 性质, 对 (11) 式相似约化得到的方程具有 Painlevé 性质, 由此可知, Ramani, Dorrizi, Grammatices 对 ARS 推测修正的必要性, 也给出方程具有弱 Painlevé 性质的例证。

参考文献:

- [1] ABLOWITZ M J, RAMANI A, SEGUR H. nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type[J]. Lett Nuove Cim, 1978, 23(2): 333 - 338.
- [2] ABLOWITZ M J, RAMANI A, SEGUR H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I [J]. J Math Phys, 1980, 21(2): 715 - 721.
- [3] ABLOWITZ M J, SEGUR H. Solitons and the inverse Scattering transform [C]. SIAM Philadelphia, Society of Industrial and Applied Mathematics, 1981: 233 - 250.
- [4] JOHN W. The Sine-Gordon equations: Complete and Partial integrability[J]. J Math Phys, 1984, 25(7): 2226 - 2235.
- [5] RAMANI A, DORRIZI B, GRAMMATIOS B. Painlevé conjecture Revisted[J]. Phys Lett, 1982, 49(4): 1539 - 1543.
- [6] DORRIZI B, GRAMMATIOS B, RAMANI A. explicit integrability for Hamiltonian systems and the Painlevé conjecture [J]. J Math Phys, 1984, 25(3): 481 - 485.

Reduction of a Kind of Differential Equations and Painlevé Analysis of the Reduced Equations

YANG Zhi-lin

(School of Sciences, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: The nonlinear differential equations are reduced by the travelling wave solution and similarity reductions, then the ordinary differential equations are obtained and the equations are discussed by Painlevé analysis. An example of differential equations with “weak” Painlevé property is given.

Key words: Painlevé property; “weak” Painlevé property; reduction; resonance