

确定一类弹性力学方程通解的简便方法^{*}

富明慧

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州510275)

摘要: 在弹性力学问题的极坐标解答中, 经常会遇到一类可转化为欧拉方程的常微分方程。在现有的教材中, 均采用先将此类方程转化为欧拉方程, 然后再求解的讲授思路, 但由于转化过程过于繁杂, 以至学生在学习此部分内容时普遍感到困难。利用幂函数做试探解, 可非常简便地确定此类方程的特征根, 并由此确定出方程的通解。作者多年的教学实践证明该方法的有效性。

关键词: 弹性力学; 极坐标解答; 欧拉方程; 特征根; 通解

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) S1-0004-02

在极坐标系中求解弹性力学问题时, 经常会遇到一些可转化为欧拉方程的常微分方程。例如, 平面问题的轴对称问题, 在极坐标系中的相容方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right]^2 \phi(r) = 0 \quad (1)$$

其中 ϕ 为艾雷应力函数;

再比如, 在曲梁的弯曲问题中, 可令应力函数 $\phi(r, \theta) = f(r) \sin \theta$, 代入相容方程后, 可得

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right]^2 f(r) = 0 \quad (2)$$

在圆孔周边的应力集中问题中, 需要求解如下形式的常微分方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right]^2 f(r) = 0 \quad (3)$$

其中 $f(r)$ 的含义与式 (2) 中类似。

在圆形薄板的轴对称弯曲中, 挠度 w 满足方程:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right]^2 w(r) = q(r) \quad (4)$$

其中, $q(r)$ 是横向荷载。

在圆形薄板受静水压力时的弯曲分析中, 可将原来状态分解成圆板受均布压力的轴对称状态与一关于水平直径反对称的状态的叠加, 而该反对称状态的挠度可表达为 $w(r, \theta) = f(r) \sin \theta$, 其中的函数 $f(r)$ 满足方程:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right]^2 f(r) = \gamma_g r \quad (5)$$

其中, γ_g 为水的比重。

上述 5 个方程均可转化为欧拉方程:

$$\left[\frac{d^4}{dr^4} + \frac{a}{r} \frac{d^3}{dr^3} + \frac{b}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{c}{r^3} \frac{d}{dr} + \frac{d}{r^4} \right] f = g(r) \quad (6)$$

其中, a, b, c, d 均为常数, 对于上述不同的方程, 它们有不同的取值。对于前 3 个方程, 显然 $g(r) = 0$ 。

在介绍方程 (1) 至方程 (5) 的解答时, 大部分教材 (如文献 [1—3]), 均采用以下方式: 先指出这些方程可转化为欧拉方程, 并直接给出对应的欧拉方程, 然后再求解之。但这种讲授方法在逻辑上存在间断, 不利于学生理解和掌握; 也有一些教材, 如文献 [4], 详细地介绍了向欧拉方程的转化过程, 但其中的数学运算十分繁杂, 令学生望而生畏。由于上述原因, 对于这些方程的解答, 学生只能逐一死记硬背, 这无疑增加了学生的学习难度。

方程 (1) 至方程 (5) 能转化为欧拉方程, 并不意味一定要先将其转化为欧拉方程, 然后才能求解。如果换个思维角度, 问题就会变得十分简单。既然方程 (1) 至方程 (5) 可转化为欧拉方程, 则它们的通解一定具有幂函数 r^k 的形式 (其实直接根据这几个方程形式上的特点也可得到这一结论), 因此无须转化, 直接将 r^k 代入以上 5 个方程, 便可得到它们的特征方程和特征根, 并由此得出该方程的齐次方程的通解。例如, 将 r^k 代入方程 (1), 得

$$k^2(k-2)^2 r^{k-4} = 0$$

从而得特征值为

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_3 = k_4 = 2$$

^{*} 收稿日期: 2004-03-17

作者简介: 富明慧 (1966 年生), 男, 教授; E-mail: stfmh@zsu.edu.cn

因此方程 (1) 的解为

$$\phi = A + B \ln r + Cr^2 + Dr^2 \ln r$$

其中, A, B, C, D 为待定常数。

再比如, 将 r^k 代入方程 (3), 可得其特征方程和特征根:

$$(k^2 - 4)k(k - 4) = 0,$$
$$k_1 = -2, k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = 4$$

从而式 (3) 的通解为

$$w = Ar^{-2} + B + Cr^2 + Dr^4$$

如果将 r^k 代入式 (5) 的齐次方程, 可得

$$(k^2 - 1)[(k - 2)^2 - 1]r^{k-4} = 0$$

从而得特征根为:

$$k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1, k_4 = 3$$

因此方程 (5) 齐次方程的通解为:

$$w = Ar^{-1} + Br + Cr \ln r + Dr^3$$

上述确定方程 (1) 至方程 (5) 齐次方程通解的方法显得十分自然, 通畅, 易于学生理解和掌握, 作者的教学实践也证明了这一点。

还应注意, r^k 代入方程(1)至方程(5)的左端后, 幂次降低 4 次, 这个性质在某些时候对于确定方

程(4)或(5)的特解是有用的。以方程(5)为例, 如果其右端项为幂函数 $q = q_0 r^m$, 则应取特解 $w^* = Er^{m+4}$, 代入(5)后, 便可确定出待定系数 E 。

以上介绍的利用幂函数试探法求解一类可转化为欧拉方程的弹性力学方程的方法, 是作者在多年的弹性力学教学实践过程中总结出来的一种简便、但行之有效的办法。它克服了以往弹性力学教材处理此类方程的种种不足之处, 能在很大程度上减轻学生理解和掌握的负担, 值得推广。作者近 6 年的弹性力学教学实践, 充分证明了上述方法的有效性。

参考文献:

[1] 徐芝伦. 弹性力学(上、下册)[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[2] 陆名万, 罗学富. 弹性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[3] 徐秉业, 黄炎, 刘信升, 等. 弹性力学与塑性力学解题指导与习题[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.

[4] 吴毓熙. 应用弹性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1989.

Simple Method of Determining General Solution of Elasticity Equation

FU Ming hui

(Department of Applied Mechanics &Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A kind of ordinary difference equation that can be transferred to Euler equation, often appears in polar coordinates solution of elastic problems. In current course, firstly, this kind of equation is transformed to Euler equation, then the method of solution is presented. But the process of transformation is too cockamamie, so the students feel it difficulty while learning. Utilizing power function as trial solution, the eigenvalue of this equation is simply and conveniently detemined, and the general solution is obtained. The teaching practice of the author had showed the availability of this method.

Key words: elastic mechanics; polar coordinates solution; Euler equation; eigenvalue; general solution