

一类挠性结构系统的非线性边界控制与镇定^{*}

徐建国¹, 刘济科²

(1. 佛山科学技术学院 信息科学与数学系, 广东 佛山 528000;

2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 在无穷维函数空间中研究了具有阻尼和陀螺部件的挠性空间结构的分布参数系统, 得到了挠性结构系统状态的结构特征; 特别是针对挠性空间结构弱阻尼的特点, 设计了一类非线性边界控制律, 使得相关受控系统强稳定, 解决了系统的镇定问题; 最后将理论研究成果应用于弹—刚耦合系统的分析中。

关键词: 挠性空间结构; 弱阻尼; 边界控制; 镇定

中图分类号: O317.2; O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 03-0008-04

大型挠性空间结构 (LFSS)、柔性机器人和其它挠性结构控制工程等伴随着当今科学技术的发展而日益成为十分重要的研究课题。其中提出的亟待研究的问题有许多, 而两个基本的和关键的问题包括: 无控系统的稳定性如何? 对非稳系统, 设计怎样的控制器使得挠性空间结构这一特殊控制对象达到镇定的目的? 已有研究表明, 具有陀螺分布 (或称角动量储存) 的挠性结构应用体, 如果系统内存在强阻尼 (即正定阻尼), 则无控系统是指渐近稳定的^[1]; 然而系统内存在弱阻尼是上述挠性运动体的主要特性之一^[2,3], 此时挠性空间结构不是严格耗散系统, 或许它是保守的, 因此只能采取适当的控制手段达到挠性结构的稳定化 (镇定)。上述问题正是本文研究的内容, 而研究的方法则是基于无穷维函数空间理论的。

1 挠性空间结构动力学控制模型及系统状态特征

在 Hilbert 空间 H 上, 考虑具有阻尼、陀螺分布的由下述二阶微分算子方程描述的挠性结构系统

$$M\ddot{w}(r, t) + (D + G)w(r, t) + Kw(r, t) + Bu(t) = 0 \quad (1)$$

式中, $w(r, t) \in H$, $w(r, t)$ 表示挠性结构的响应 (位移), $u(t)$ 为控制输入; M 为质量算子且 $M = \sigma(r)I$, $\sigma(r)$ 表示挠性结构的密度函数, I 为单位算子; K 为刚度微分算子; D 为阻尼算子; G 为角动量储存算子 (又称陀螺算子); B 为控制算子。方程 (1)

所对应的边界条件为

$$Lw(r, t) = 0 \quad r \in \partial\Omega \quad (2)$$

式中, $\partial\Omega$ 表示挠性结构所占空间域 Ω 的边界, L 为适当的微分算子。

取 Hilbert 状态空间 $H = L^2(\Omega)$ 及其内积和范数如下

$$L^2(\Omega) = \{w(r, t) \mid \int_{\Omega} |w(r, t)|^2 d\Omega < \infty,$$

$$w(r, t) \text{ 满足 (2) 式}\}$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

$$\|\varphi\| = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi \in H$$

下面给出的所有假设均是挠性结构空间构形特征, 与实际工程背景一致, 但不失一般性。在 $L^2(\Omega)$ 中 M 为自伴正定线性有界算子, $0 \in \rho(M)$ (M 的正则集); K 为自伴非负闭稠定算子, 具有紧预解算子, 为方便计, $0 \in \rho(K)$; D 为自伴非负闭算子; G 为反自伴算子; 控制算子 B 是有限维线性算子 $B: \mathbf{R}^m \rightarrow L^2(\Omega)$ 。它们的定义域有如下关系: $\text{Dom}(M) = L^2(\Omega)$, $\text{Dom}(D) \supset \text{Dom}(K^{\frac{1}{2}})$, $\text{Dom}(G) \supset \text{Dom}(K^{\frac{1}{2}})$ 。

为得到系统的状态特征结构, 下将二阶系统式 (1) 转换为一阶形式。为此取新的状态空间—能量范数空间, 记为 $H_E = \text{Dom}(K^{\frac{1}{2}}) \times L^2(\Omega)$ 。其上能量内积定义为

* 收稿日期: 2002-12-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19402014, 10102023); 广东省自然科学基金资助项目 (960528); 航空科学基金资助项目 (94E53190)

作者简介: 徐建国 (1964 年生), 博士后, 副教授; E-mail: xjianguo@foshan.net

$$\langle x, y \rangle_E = \langle K^{\frac{1}{2}} x_1, K^{\frac{1}{2}} y_1 \rangle + \langle M x_2, y_2 \rangle$$

式中, $x = (x_1, x_2)^T \in H_E$, $y = (y_1, y_2)^T \in H_E$ 。由此诱发的能量范数为 $\|x\|_E = \langle x, x \rangle_E^{\frac{1}{2}}$, $x \in H_E$ 。定义新的状态变量 $z = (w(t), \dot{w}(t))$, 则具有阻尼和陀螺分布的挠性结构系统式(1)可表述为

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$\text{式中, } A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}(D+G) \end{bmatrix},$$

$$Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}Bu(t) \end{bmatrix}$$

由上述一般性假设易知算子 A 具有紧预解算子, 从而由 Riesz-Schauder 关于紧算子的谱理论^[4] 易知以下引理 1。

引理 1 算子 A 的谱集 $\sigma(A)$ 由至多可数个特征值 λ_k 构成, 且可排列为: $\dots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots$; 而 $\lambda_k = \lambda_{-k}$ ($k=1, 2, \dots$), $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$; 其对应的特征向量集 $\{\Phi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 构成 Hilbert 空间 H_E 上一完备正交基。

易知 A 是闭稠定算子且易证 $\langle Ax, x \rangle_E = -\langle Dx_2, x_2 \rangle \leq 0$; 故 A 是耗散算子。根据算子半群理论中的 Lumer-Phillips 定理^[5] 知, 算子 A 生成压缩 C_0 半群, 记为 $T(t)$ ($t \geq 0$)。进一步分析不难得到下述关于挠性结构系统式(1)即式(3)状态解的结构特征定理成立。

定理 1 与二阶挠性结构系统式(1)等价的一阶状态方程式(3)对任意初值 $z(r, 0)$ 存在惟一状态 $z(r, t)$ 且可表示为

$$z(r, t) = T(t)z(r, 0) + \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (4)$$

式中解算子 (即半群) $T(t)$ 的特征结构由下式给出

$$T(t)h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \Psi_k(r), h \rangle_E \Phi_k(r) \quad (5)$$

$$h \in H_E$$

(5) 式中, $\{\Psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是 A 的共轭伴随算子 A^* 的特征值集 $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 所对应的特征向量集。

2 弱阻尼下系统的边界控制与镇定

所谓弱阻尼系指对任意 $x \in \text{Dom}(D)$, $\langle Dx, x \rangle \geq 0$ 。本节首先给出具有弱阻尼、陀螺分布的挠性空间结构镇定的意义, 然后得到使得受控系统强稳定的非线性控制律以便达到系统镇定的目的。

定义 1 考虑系统状态方程式(3), 对非线性算子 $P: H_E \rightarrow R^m$, 称非线性反馈控制 $u(t) =$

$P(z(t))$ 使系统(3) 镇定是指

$$z(r, t) = T(t)z(r, 0) + \int_0^t T(t-\tau)BP(z(\tau))d\tau \quad (6)$$

有惟一强连续解, 且 $\|z(r, t)\|_E \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)。

由于算子 K 具有紧预解算子, $0 \in \rho(K)$, 故算子 $K^{-1}M$ 是紧算子。由算子谱理论知, $M^{-1}K$ 的谱由至多可数个正特征值 $\{\omega_k^2\}$ 构成, 记 $\{\varphi_k\}$ 为相应的特征向量; 经正交规格化后, 易见

$$M^{-1}K\varphi_k = \omega_k^2\varphi_k \quad \langle M\varphi_k, \varphi_j \rangle = \delta_{kj}$$

这里, ω_k, φ_k 分别称为自然频率和自然模态。

定理 2 假设“镇定”定义中的非线性算子 P 由下式给定

$$P(z) = h(-B^*z) = h(B^*z_2) \quad (7)$$

式中, $z = (z_1, z_2)^T \in H_E$, B^*, B^* 分别为算子 B 和 B 的共轭伴随算子; 假定映射 $h: R^m \rightarrow R^m$ 满足下述条件: ① 对任意 $v \neq 0$, $\langle h(v), v \rangle > 0$; ② $\|h(v)\| \leq m\|v\|$, 这里 m 为正数; ③ $h(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件; 同时假设若弱阻尼算子满足: D^{-1} 存在且有界, 即 $0 \in \rho(D)$ 。则非线性边界控制

$$u(t) = h(-B^*z(t)) = h(B^*\dot{w}(t)),$$

$$z = (w(t), \dot{w}(t))^T \quad (8)$$

使得系统(3) 镇定, 即解式(4)中的 $z(r, t)$ 强稳定。

证明 这里用到的证明方法是模态特征函数展开法。考虑非线性边界控制式(8)下的二阶挠性结构控制系统

$$M\dot{w}(r, t) + (D+G)\dot{w}(r, t) + Kw(r, t) + Bh(B^*\dot{w}(t)) = 0 \quad (9)$$

进而令 $\xi_k(t) = \langle w(r, t), M\varphi_k \rangle$, 则对式(9) 的解 $w(r, t)$ 成立着下述模态特征函数展开

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \varphi_k \quad (10)$$

将展开式代入系统方程式(9) 并令 $2\sigma_k = \langle D\varphi_k, \varphi_k \rangle + \langle G\varphi_k, \varphi_k \rangle$, 经整理比较系数可得

$$\ddot{\xi}_k(t) + 2\sigma_k\dot{\xi}_k(t) + \omega_k^2\xi_k(t) = f_k(t) \quad (11)$$

式中, $f_k(t) = \xi_k(t) \langle (D+G)\varphi_k, \varphi_k \rangle - \langle (D+G)\dot{w}(t), \varphi_k \rangle - \langle h(B^*\dot{w}(t)), B^*\varphi_k \rangle$ 。解微分方程式(11) 得

$$\xi_k(t) = C_{1k}e^{-\zeta_k t} \cos \eta_k t + \frac{C_{2k}e^{-\zeta_k t} \sin(\eta_k t)}{\eta_k} - \int_0^t U(t-s)f_k(s)ds \quad (12)$$

式中, $(-\zeta_k \pm i\eta_k)$ 是特征方程 $\lambda^2 + 2\sigma_k\lambda + \omega_k^2 = 0$ 的根, $U(t) = \frac{e^{\zeta_k t} \sin \eta_k t}{\eta_k}$ 。

根据 Schwartz 不等式不难分析得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\int_0^t U(t-s) \langle (D+G) \dot{w}(s), \varphi_k \rangle ds \rightarrow 0, \tag{13}$$
$$\int_0^t U(t-s) \langle h(B^* \dot{w}(s)), B^* \varphi_k \rangle ds \rightarrow 0$$

由式(12)、(13)及 $f_k(t)$ 的表达式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t) &= \xi_k(t) - 2\sigma_k \int_0^t U(t-s) \xi_k(s) ds \rightarrow 0 \\ &\quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

对上式进行分部积分, 并令

$$\beta(t) = \alpha_k(t) + 2\sigma_k \int_0^t U(t-s) \xi_k(s) ds$$

则有 $\beta(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$; 对 $\beta(t)$ 表达式利用 Laplace 变换求解, 知 $\xi_k(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 。

对(12)式两边求导, 同理可得 $\dot{\xi}(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ (这里指出当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\xi(t) \rightarrow 0$ 是关于 k 一致收敛的)。

经计算得

$$\begin{aligned} \langle K w(t), \varphi_k \rangle &= -\omega_k^2 \xi_k(t), \\ \langle k \dot{w}(t), \varphi_k \rangle &= -\omega_k^2 \dot{\xi}_k(t) \end{aligned}$$

故 $K w(t)$ 和 $K \dot{w}(t)$ 均弱收敛于0; 由于 K^{-1} 的紧性, 所以 $w(t)$ 和 $\dot{w}(t)$ 在 $H = L^2(\Omega)$ 中强收敛于零。

由于 $h(\cdot)$ 的 Lipschitz 条件及定理 1, 故对任意初值 $z(r, 0) \in \text{Dom}(A)$, 相应于非线性边界控制下的二阶挠性结构系统式(9)的一阶控制系统式(3)存在惟一解

$$\begin{aligned} z(r, t) &= T(t) z(r, 0) + \\ &\quad \int_0^t T(t-\tau) B h(B^* \dot{w}(\tau)) d\tau \end{aligned} \tag{14}$$

在 H_E 中强收敛于零, 即 $\|z\|_E \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 。

下证对任意初值 $z(r, 0) \in H_E$, 式(14)的解 $z(r, t)$ 亦是强收敛于零。为此对

$$\begin{aligned} z_1(r, 0), z_2(r, 0) &\in H_E \\ \text{令 } z(r, t) &= M(t) z(r, 0) \\ \text{则 } M(t)(z_2(r, 0) - z_1(r, 0)) &= \\ T(t)(z_2(r, 0) - z_1(r, 0)) + \end{aligned} \tag{15}$$

$$\int_0^t T(t-\tau) [B h(B^* \dot{w}_2(\tau)) - B h(B^* \dot{w}_1(\tau))] d\tau$$

$$\text{令 } g(t) = \|z_2(r, t) - z_1(r, t)\|$$

由半群算子 $T(t)$ 的压缩性及 $h(\cdot)$ 的性质, 对式(15)两边取范数可得

$$g(t) \leq g(0) + \gamma \int_0^t g(\tau) d\tau$$

式中 γ 为某正数; 上式表明 $g(t) \leq e^{\gamma t} g(0)$ 。从而 $z(r, t)$ 具有 Lipschitz 连续性。结合弱解式(14)并按 $z(r, 0) \in \text{Dom}(A)$ 时分析方法类似处理, 便可知对任意 $z(r, 0) \in H_E$, $z(r, t)$ 亦强收敛于零, 即

$\|z(r, t)\|_E \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 。至此定理获证。

定理 2 表明在弱阻尼下, 当阻尼算子的逆算子存在且有界时, 适当的边界控制可使挠性结构镇定。特殊地, 由定理的证明不难得到下述推论成立。

推论 1 对线性反馈边界控制 $u(t) = -LB^* z(t) = LB^* \dot{w}(t)$ (这里 L 为正定线性算子且有有界逆), 则挠性结构系统式(1)强镇定的充要条件为: 对任意整数 k

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_k, D \varphi_k \rangle + \langle B^* \varphi_k, B^* \varphi_k \rangle + \\ &\langle \varphi_k, G \varphi_k \rangle \neq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

3 弹—刚耦合系统镇定示例分析

本节应用上面推得的结果研究一类弹—刚耦合系统的镇定问题。

考虑一端悬臂, 另一端固联端部刚体并作用控制力和控制力矩的均匀 Euler-Bernoulli 梁模型。如图 1 所示。

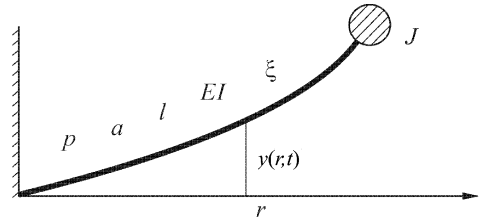


图 1 弹—刚耦合系统

Fig 1 The system coupled with elastomer and rigid body

设 $y(r, t)$ 为梁的纵向振动位移, 其具有结构阻尼的支配方程为^[6]

$$\begin{aligned} \rho a \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial t^2} - 2\xi \sqrt{\rho a EI} \frac{\partial y(r, t)}{\partial t^2} + \\ EI \frac{\partial^4 y(r, t)}{\partial r^4} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

式中, ρ, a, l, EI 分别表示梁的密度, 截面积, 长度和弯曲刚度; $\xi \geq 0$ 为结构阻尼系数; $0 < r < l$ 。梁固定端边界条件和自由端边界控制动力学方程分别为

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0 \tag{18}$$

$$m \frac{\partial y(l, t)}{\partial t^2} + 2\xi \sqrt{\rho a EI} \frac{\partial y(l, t)}{\partial t^2} -$$

$$EI \frac{\partial^3 y(l, t)}{\partial r^3} + F_1(t) = 0 \tag{19}$$

$$J \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial r^2} + M_1(t) = 0 \tag{20}$$

式中, m, J 分别表示端部刚体的质量与转动惯量; $F_1(t), M_1(t)$ 分别表示作用于自由端 $r = l$ 上的边界控制力和控制力矩。

取 Hilbert 状态空间 $H = L^2(0, l) \times C^2$ (C 为复数域), H 中的元素形如 $w = (y(\cdot), b_1, b_2)^T, y(\cdot) \in L^2(0, l), b = (b_1, b_2)^T \in C^2$. 定义算子

$$Mw = \begin{pmatrix} \rho ay(\cdot) \\ mb_1 \\ Jb_2 \end{pmatrix}, Dw = \begin{pmatrix} -2\xi \sqrt{\rho aEI} y''(\cdot) \\ 2\xi \sqrt{\rho aEI} y'(l) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Kw = \begin{pmatrix} EI y'''(\cdot) \\ -EI y'''(l) \\ EI y''(l) \end{pmatrix}, Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

而定义域

$$\text{Dom}(K) = \{w \mid y \in H^4(0, l), y(0) = y'(0) = 0, b_1 = y(l), b_2 = y'(l)\}, \text{Dom}(D) = \text{Dom}(K^{\frac{1}{2}})$$

记控制向量

$$u(t) = (F_1(t), M_1(t))^T$$

则弹—刚耦合动力学控制系统式 (17) — (20) 由下述算子方程描述

$$M\dot{w}(t) + Dw(t) + Kw(t) + Bu(t) = 0 \quad (22)$$

易证算子 K^{-1} 是紧算子; 可见 $M^{-1/2}KM^{-1/2}$ 具有完全正交的特征向量集, 记

$$M^{-1/2}KM^{-1/2}\psi_k = \omega_k^2\psi_k, \langle \psi_k, \psi_j \rangle = \delta_{kj}$$

令

$$\varphi_k = \sqrt{M}^{-T}\psi_k$$

则

$$K\varphi_k = \omega_k^2M\varphi_k, \langle \varphi_k, M\varphi_j \rangle = \delta_{kj}$$

下面证明, 对任意 $k, \langle D\varphi_k, \varphi_k \rangle + \langle B^* \varphi_k, B^* \varphi_k \rangle \neq 0$. 用反证法. 设存在 k_0 使得上式不成立, 则有

$$B^* \varphi_{k_0} = 0;$$

由于

$$B^* w = b = (b_1, b_2)^T,$$

由 M 的非奇异性得

$$B^* k\varphi_{k_0} = \omega_{k_0}^2 B^* k\varphi_{k_0} = 0;$$

进而令

$$\varphi_{k_0} = (y(\cdot), B^* \varphi_{k_0})^T,$$

则由

$$B^* \varphi_{k_0} = 0 \text{ 及 } B^* K\varphi_{k_0} = 0$$

展开知 $y(l) = y'(l) = y''(l) = 0$ 和 $y'''(\cdot) = 0$; 由此得 $y(\cdot)$ 惟一确定且 $y(\cdot) = 0$; 从而特征向量 $\varphi_{k_0} \equiv 0$, 矛盾.

由于对任意整数 k ,

$$\langle D\varphi_k, \varphi_k \rangle + \langle B^* \varphi_k, B^* \varphi_k \rangle \neq 0,$$

根据上节推论 1 知弹—刚耦合系统镇定.

注记 上述镇定的结果不依赖于 $\langle D\varphi_k, \varphi_k \rangle$ 是否为 0, 即使系统无阻尼即 $\xi = 0$, 上述边界控制同样可使弹性振动渐近衰减到平衡状态, 这是工程应用中一个十分有用的结果.

参考文献:

[1] 徐建国, 贾军国. 函数空间多体挠性结构系统动力学、稳定性与控制的研究[J]. 应用数学与力学, 2001, 22(12): 1267—1277.

[2] BALAS M J. Trends in large space structure control theory: Fondest hopes, wildest dreams[J]. IEEE Trans Auto Contr, 1982, 27(6): 522—535.

[3] 林健, 黄琳. 大型空间结构的动力学建模与控制[J]. 力学进展, 1991, 21(3): 333—341.

[4] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析入门[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.

[5] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. Berlin: Springer Vereage, 1983.

[6] BALAKRISHNAN A V. Damping operators on continuum models of flexible structures: explicit models for proportional damping in beam bending with end-bodies[J]. Appl. Math. Optimz. 1990, 21(3): 315—334.

Nonlinear Boundary Control and Stabilization
of a Class of System with Flexible Structures

XU Jian-guo¹, LIU Ji-ke²

(1. Department of Information Science and Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China;
2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The distributed parameter system of flexible space structures with damping and gyroscopic parts is investigated in infinite functional spaces. The structure property of the state of the flexible system is obtained. Especially, for the weak damping of the flexible space structure, a type of nonlinear boundary control law is designed to make the system strongly stabilized. Finally, as an illustrative example, the system coupled with elastomer and rigid body is analyzed.

Key words: flexible space structure; weak damping; boundary control; stabilization