第 42 卷 第 1 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 42 No. 1
2003 年 1 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Jan. 2003

二次奇摄动问题解的渐近估计*

韩 祥 临
（湖州师范学院数学系，浙江 湖州 313000）

摘 要：研究了二次奇摄动问题 $\varepsilon y''=p(t,y)y'^2+g(t,y)$, $0<t<1$, $y(0,\varepsilon)=A(\varepsilon)$, $y(1,\varepsilon)=B(\varepsilon)$ 解的性态。在适当的条件下，利用微分不等式理论，讨论了该问题解的存在性和渐近性态，给出任意 n 阶的渐近估计。

关键词：非线性的；奇摄动；渐近性态
中图分类号：O175.14　　文献标识码：A　　文章编号：0529-6579（2003）01-0104-02

1 构造形式解

奇摄动理论是目前国际上十分关注的课题之一，许多学者都在研究有关问题，如 Glizer 等[1]，Butuzov 等[2] 以及 Relley[3] 等。本文是在上述基础上，研究二次奇摄动方程的边界层问题，先构造问题的形式解，然后用微分不等式原理讨论解的存在性和渐近性态[4]。

考虑如下 Dirichlet 问题：

$$\varepsilon y''=p(t,y)y'^2+g(t,y),\ 0<t<1 \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon)=A(\varepsilon),\ y(1,\varepsilon)=B(\varepsilon) \tag{2}$$

其中，ε 为正的小参数，

$$A(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\varepsilon^j,\ B(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\varepsilon^j。$$

本文假设

(H_1) 问题（1）－（2）的退化问题

$$p(t,y)y'^2+g(t,y),\ 0<t<1,\ y(1)=B_0$$

存在解 $y=y_0(x)\in C^2[0,1]$。

(H_2) $h(t,y,y')$ 在 $[0,1]$ 上关于 t 连续，且关于 y,y' 和 ε 在 Ω 上有 $n+1$ 阶连续偏导数，其中，

$$h(t,y,y')=p(t,y)y'^2+g(t,y),\ \Omega=\left\{(t,y)\,\middle|\,0\leqslant t\leqslant 1,\ |y-y_0|\leqslant d(t)\right\},$$

$d(t)$ 是连续函数，且对某一个小的正数 δ，有

$$d(t)=\begin{cases}|A(0)-y_0(0)|+\delta, & t\in\left[0,\dfrac{\delta}{2}\right]\\ \delta & t\in[\delta,1]\end{cases}$$

(H_3) 存在正的常数 l,k，使得在 Ω 内有 $\left|\dfrac{\partial h}{\partial y}\right|\leqslant l$, $2p(t,y)y'\geqslant k>0$。

在上述假设下，问题（1）－（2）在 $t=0$ 点附近有边界层。在离开 $t=0$ 点，假定问题（1）－（2）的解 $y(t,\varepsilon)$ 有如下渐近展开式：

$$y(t,\varepsilon)\sim y_0(t)+\sum_{j=1}^{n}y_i(t)\varepsilon^j+O(\varepsilon^{n+1})$$

将 $y(t,\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$，代入问题（1），（2），比较 ε 同次幂系数得：

$$2p(t,y_0)y_0'y_j'+[p_y(t,y_0)y_0'^2+g_y(t,y_0)]y_j+G_{j-1}=y_{j-1}'' \tag{3}$$

其中，G_{j-1} 由 $t,y_0,\cdots,y_{j-1},y_0',\cdots,y_{j-1}'$ 确定。

$$y_j(1)=B_j,\quad j=1,2,\cdots \tag{4}$$

由（3），（4）即可确定 $y_j(t)$，$j=1,2,\cdots$。

2 主要结果

定理 在假设（H_1）－（H_3）及 $\sum_{j=0}^{n}y_j(0)\varepsilon^j\geqslant A(\varepsilon)$ 下，问题（1）－（2）具有解 $y(t,\varepsilon)$，且有如下渐近估计式：

$$Y(t)+N(t)-M(t)\varepsilon^{n+1}\leqslant y(t,\varepsilon)\leqslant Y(t)+M(t)\varepsilon^{n+1},\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{5}$$

其中，$0<\varepsilon\leqslant\dfrac{k^2}{4l}$, $Y(t)=\sum_{j=0}^{n}y_i(t)\varepsilon^j$,

$$N(t)=\left(A(\varepsilon)-\sum_{j=0}^{n}y_i(0)\varepsilon^j\right)\exp(\lambda_1 t),$$

$$M(t)=\frac{r}{l}\left(\sigma\exp(\lambda_2(t-1))-1\right)。$$

而 λ_1,λ_2 为 $\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l=0$ 的 2 个负根，且当 ε 充分小时，有

$$\lambda_1=-\frac{k}{\varepsilon}+\frac{l}{k}+O(\varepsilon),\ \lambda_2=-\frac{l}{k}+O(\varepsilon)$$

σ 为大于 1 的任意常数，r 为待定的正常数。

证明 构造界定函数 $\alpha(t,\varepsilon)$, $\beta(t,\varepsilon)$：

$$\alpha(t,\varepsilon)=Y(t)+N(t)-M(t)\varepsilon^{n+1},$$

$$\beta(t,\varepsilon)=Y(t)+M(t)\varepsilon^{n+1}$$

显然 $\alpha(t,\varepsilon)\in C^2[0,1]$，$\beta(t,\varepsilon)\in C^2[0,1]$，并且

* 收稿日期：2002－06－24
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10071048）；浙江省自然科学基金资助项目（102009）
作者简介：韩祥临（1965 年生），男，副教授；E-mail：xlhan@hutc.zj.cn

$\alpha(t,\varepsilon)\leqslant\beta(t,\varepsilon)$。

易证 $\alpha(0,\varepsilon)\leqslant A(0,\varepsilon)\leqslant\beta(0,\varepsilon)$。

因为存在常数 m，使得

$$\left|B(\varepsilon)-\sum_{j=0}^{n}y_j(1)\varepsilon^j\right|\leqslant m\varepsilon^{n+1}$$

所以当 $r\geqslant\frac{ml}{\sigma-1}$ 时，必有

$$\alpha(1,\varepsilon)\leqslant B(\varepsilon)\leqslant\beta(1,\varepsilon)。$$

又

$$\begin{aligned}h(t,\alpha,\alpha')&=h(t,Y(t),Y'(t))+\\&[h(t,\alpha,Y'(t))-h(t,Y(t),Y'(t))]+\\&[h(t,\alpha,\alpha')-h(t,\alpha,Y'(t))]=\\&h(t,Y(t),Y'(t))+h_y(t,\eta_1,Y'(t))(\alpha-Y(t))+\\&h_{y'}(t,\alpha,\eta_2)(\alpha'-Y'(t))\end{aligned}$$

其中，η_1 为 α 与 $Y(t)$ 之间的某一值，η_2 为 α' 与 $Y'(t)$ 之间的某一值。

类似地有：

$$\begin{aligned}h(t,\beta,\beta')&=\\&h(t,Y(t),Y'(t))+h_y(t,\eta_3,Y'(t))(\beta-Y(t))+\\&h_{y'}(t,\beta,\eta_4)(\beta'-Y'(t))\end{aligned}$$

其中，η_3 为 β 与 $Y(t)$ 之间的某一值，η_4 为 β' 与 $Y'(t)$ 之间的某一值。

又由方程（3）、（4）及 $h\left(t,y_0,y_0'\right)$ 知，必存在正数 C_1 使得：

$$h(t,Y(t),Y'(t))\leqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}y_j''\varepsilon^j+C_1\varepsilon^{n+1},$$

$$h(t,Y(t),Y'(t))\geqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}y_j''\varepsilon^j-C_1\varepsilon^{n+1}$$

又存在正数 C_2，使 $|y_n''(t)|\leqslant C_2$，且 $\sum_{j=0}^{n}y_j(0)\varepsilon^j\geqslant A(\varepsilon)$。现取 $r=\max\left\{\frac{ml}{\sigma-1},C_1+C_2\right\}$，则有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\alpha''-h(t,\alpha,\alpha')\geqslant\varepsilon\sum_{j=0}^{n}y_j''(t)\varepsilon^j+\\&\varepsilon\lambda_1^2\left(A(\varepsilon)-\sum_{j=0}^{n}y_j(0)\varepsilon^j\right)\exp(\lambda_1 t)-\\&\frac{r\sigma(\varepsilon\lambda_2^2)}{l}\exp(\lambda_2(t-1))\varepsilon^{n+1}-\varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}y_j''\varepsilon^j-\\&C_1\varepsilon^{n+1}-l\left(\sum_{j=0}^{n}y_j(0)\varepsilon^j-A(\varepsilon)\right)\exp(\lambda_1 t)-\\&\frac{lr}{l}\left(\sigma\exp(\lambda_2(t-1))-1\right)\varepsilon^{n+1}-\\&k\lambda_1\left(\sum_{j=0}^{n}y_j(0)\varepsilon^j-A(\varepsilon)\right)\exp(\lambda_1 t)-\\&2\frac{(k\lambda_2)r}{l}\exp(\lambda_2(t-1))-1)\varepsilon^{n+1}\geqslant\\&\varepsilon^{n+1}(r-C_1-C_2)\geqslant 0,\quad 0<t<1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\beta''-h(t,\beta,\beta')\geqslant\\&\varepsilon\sum_{j=0}^{n}y_j''(t)\varepsilon^j+\frac{l(\varepsilon\lambda_2^2)\sigma}{l}\exp(\lambda_2(t-1))-1)\varepsilon^{n+1}-\\&\varepsilon\sum_{j=0}^{n}y_j''\varepsilon^j+C_1\varepsilon^{n+1}\leqslant(C_1+C_2)\varepsilon^{n+1}+\\&\frac{r\sigma}{l}\exp(\lambda_2(t-1))(\varepsilon\lambda^2+k\lambda+1)\varepsilon^{n+1}-\\&\frac{r\sigma}{l}(k\lambda_2)\exp(\lambda_2(t-1))\varepsilon^{n+1}-\\&r(\sigma\exp(\lambda_2(t-1))-1)\varepsilon^{n+1}=\\&\varepsilon^{n+1}(r-C_1-C_2)\leqslant 0,\quad 0<t<1\end{aligned}$$

由微分不等式原理[4]知，不等式（5）成立，从而定理获证。类似地，当 $\sum_{j=0}^{n}y^j(0)\varepsilon^j\leqslant A(\varepsilon)$ 时，可得到渐近估计式

$$Y(t)-M(t)\varepsilon^{n+1}\leqslant y(t,\varepsilon)\leqslant$$
$$Y(t)+N(t)+M(t)\varepsilon^{n+1},\quad t\in(0,1)$$

其证明同理。

参考文献：

[1] GLIZER V Y, FRIDMAN E. A control of linear singularly perturbed system with small state delay[J]. J Math Anal Appl, 2000, 250(1): 49－85.

[2] BUTUZOV V F, NEFEDOV N N, SCHNEIDER K R. Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange of stabilities[J]. J Differential Equations, 2001, 169: 373－395.

[3] KELLEY W G. A singular perturbation problem of carrier and pearson[J]. J Math Anal Appl, 2001, 255: 678－697.

[4] De JAGER E M, JIANG F. The theory of singular pertubation[M]. Amsterdam: Nort-Holland Publishing Co, 1996.

The Asymptotic Estimate for Quadratic Singularly Perturbed Problems

HAN Xiang-lin

(Huzhou Teachers College, Zhejiang, Huzhou 313000, China)

Abstract: The quadratic singularly perturbed problems $\varepsilon y''=p(t,y)y'^2+g(t,y), 0<t<1, y(0,\varepsilon)=A(\varepsilon), y(1,\varepsilon)=B(\varepsilon)$ are studied. By the theory of differential inequalities, the existence and asymptotic behavior of solution for the boundary value problems are probed. The n_{th}-order asymptotic estimate is obtained.

Key words: nonlinearity; singular perturbation; asymptotic behavior