

Hamilton 弹性动力学及其辛算法^{*} ——一个新学科研究的进展

罗 恩¹, 黄伟江², 朱慧坚¹

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275;

2. 广州市建筑科学研究院, 广东 广州 510030)

摘 要: 概述了作者最近在 Hamilton 弹性动力学及其辛算法方面所取得的一些原创性的重要研究成果。

关键词: Hamilton 弹性动力学; 相空间; Hamilton 正则方程; Hamilton 变分原理; 辛算法

中图分类号: O347 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2003) 05-0131-02

1 位形空间、状态空间和相空间

在分析力学中^[1,2], 为了描述 n 个自由度力学系统的状态, 需要引入位形空间 $M = \{q\}$ 、状态空间 $\{q, \dot{q}\}$ 和相空间 $\{q, p\}$ 。其中 q 为广义坐标 (广义位移) 向量, $\dot{q}$ 为广义速度向量和 p 为广义动量向量。相空间可将动力系统的状态几何化。

从数学上看, 位形空间 M 是一个 n 维流形 (流形 M); 状态空间是 M 的切丛 TM , 而相空间是 M 的余切丛 T^*M , 它们都是一个 $2n$ 维流形。切丛 TM 与余切丛 T^*M 互为对偶。

2 Lagrange 力学与 Hamilton 力学

Lagrange 力学用位形空间 (流形 M) 来描述力学系统的运动。一个 Lagrange 力学系统用一流形 M 和其切丛 TM 上的一个函数 (Lagrange 函数 L) 给出。Lagrange 力学可以说是力学的切丛表述。在位形空间上, Lagrange 力学的基本方程—Lagrange 方程是二阶微分方程组, 对理论分析与数值计算十分不便。Lagrange 力学最核心部分是 Lagrange 方程和 Hamilton 变分原理。但 Hamilton 变分原理只能反映动力学的时间两端值问题。为此, 本文建立了能反映动力学初值问题的非传统 Hamilton 变分原理, 其泛函式如下:

$$\Pi(q) = \int_0^{t_1} L(q, \dot{q}) dt - m \dot{q}_1^T q_1 - (\tilde{q}_0^T - q_0^T) m \dot{q}_0 + m(\dot{q}_0^T - \dot{q}_0^T) q_1$$

式中, m 为质量矩阵, 带上标 $\circ$ 的量为限制变分量^[3]。

Hamilton 力学用相空间来描述力学系统的状态。一个 Hamilton 力学系统用一偶数维流形 (相空

间) 和余切丛 T^*M 上的一个辛结构及其上的一个函数 (Hamilton 函数 H) 给出。因此, Hamilton 力学可以说是力学的余切丛表述。Hamilton 力学最核心部分就是在相空间上的 Hamilton 正则方程和相空间 Hamilton 变分原理。Hamilton 正则方程是一阶微分方程组, 形式简单并呈现出美妙的对称性, 而且还具有自然辛结构。这些独特的优点为定性研究和求解提供了新途径。但是, 对其具有的优越计算功能, 人们相当长时间内没有察觉到。直到 20 世纪 80 年代和 90 年代, 冯康和钟万勰才分别提出基于 Hamilton 正则方程的辛几何算法^[4]和精细时程积分法^[5]。这些都是很有特色的优质算法。

相空间 Hamilton 变分原理在 1892 年由 Poincaré 提出。这种变分原理具有自然辛结构, 但它只反映动力学的时间两端值问题。为此, 作者最近建立了能反映动力学初值问题的非传统相空间 Hamilton 变分原理, 其泛函如下:

$$\Pi_2(p, q) = \int_0^{t_1} [p^T \dot{q} - H(p, q)] dt - \dot{p}_1^T q_1 - (\tilde{q}_0 - q_0^T) p_0 + (\tilde{p}_0^T - \dot{p}_0^T) q_1$$

相空间 Hamilton 变分原理提出至今已有 100 多年, 但没有受到应有的重视。国内外对其论述的文献都很少, 而对其具有的更为优越的计算功能, 就一直没有察觉到。最近作者开展基于相空间 Hamilton 变分原理的辛算法研究, 提出了辛时间子域法^[6]。它是一种高性能、高效率和高精度的新算法。

从几何上看, Lagrange 力学对应于 Riemann 几何, 因此 Lagrange 力学可称为 Riemann 几何的力学; 而 Hamilton 力学对应于辛几何, 因此 Hamilton

* 收稿日期: 2003-08-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10172097, 19902022)

作者简介: 罗恩 (1940 年生), 男, 教授, 博士生导师, 国家级专家; E-mail: Luoenszu@sina.com.cn

力学可称为辛几何的力学。

动力学体系本质上应当是 Hamilton 体系, 因此动力学的基本理论和分析方法要完全在 Hamilton 体系下来建立, 才是最合理和最完美的选择; 但是, 100 多年来动力学的基本理论和分析方法都是在 Lagrange 体系下建立的, 这不是最合理和最完美的选择, 它导致有些问题难以或不能解决。因此我们认为, 应当与时俱进, 及时将动力学从 Lagrange 体系转变到 Hamilton 体系。这种体系的变革, 影响将是深远的, 意义是重大的。

3 Hamilton 弹性动力学的基本理论

Hamilton 弹性动力学的基本理论至今还没有系统建立, 尚处于空白状态。最近, 作者根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想, 通过作者早已提出的一条简单而统一的新途径, 系统建立了弹性动力学 (多自由度系统、梁、深梁、平面问题、薄板、厚板、夹层板、薄壳和空间问题等) 传统与非传统相空间 Hamilton 型变分原理。然后, 基于这些相空间 Hamilton 型变分原理推导出相应的 Hamilton 正则方程。作者所建立的弹性动力学相空间 Hamilton 型变分原理和 Hamilton 正则方程, 构成 Hamilton 弹性动力学基本理论的核心部分。

4 基于相空间非传统 Hamilton 型变分原理的辛算法

最近作者基于相空间非传统 Hamilton 型变分原理, 先后提出弹性结构动力分析的辛时间子域法、改进的辛时间子域法、辛数值流形时间子域法、辛时域有限元法、辛空间有限元一时间子域法、辛空间局部综合离散一时间子域法和辛空一时半解析法

等一系列辛算法。这些辛算法具有独特的计算稳定性与长时间的跟踪能力, 正确反映原系统本来面貌与结构特性, 避免了传统非辛算法带来的人工耗散和种种非系统本来具有的污染与干扰。这些优质的辛算法与 Lagrange 体系下的非辛算法相比, 具有压倒的优越性, 对比十分明显。

5 结 语

最近作者所取得的一些创新性的重要成果, 目前处于国际前列。这些成果不仅对弹性动力学的更新换代和促进新的分支学科—Hamilton 弹性动力学的建立与发展有非常重要意义, 而且将会引发一系列有关的后继研究工作。

参考文献:

- [1] ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [2] 余杨政, 冯承天. 物理学中的几何方法 [M]. 北京: 高等教育出版社; 海德堡: 施普林格出版社, 1998(2001 重印).
- [3] FINLAYSON B A. The method of weighted residuals and variational principles [M]. New York: Acad Press, 1972: 336—337.
- [4] FENK K. Difference schemes for Hamiltonian formulism and symplectic geometry [J]. JCM, 1986, 4(3): 279—289.
- [5] 钟万勰. 结构动力学方程的精细时程积分法 [J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131—136.
- [6] 罗恩, 黄伟江, 张贺忻. 相空间非传统 Hamilton 型变分原理与辛算法 [J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(2): 1119—1126.

Hamilton Elastodynamics and the Symplectic Algorithms ——the Advances in the Study for a New Subject

LUO En¹, HUANG Wei jiang², ZHU Hui jian¹

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Guangzhou Institute of Building Science, Guangzhou 510030, China)

Abstract: This paper outlines the original important research results on Hamilton elastodynamics and the symplectic algorithms recently obtained by the authors.

Key words: Hamilton elastodynamics; phase space; Hamilton canonical equations; Hamilton variational principle; symplectic algorithm