

弱粗数^{*}

黎永锦

(中山大学逻辑与认知研究所//数学系, 广东 广州510275)

摘要: 在弱粗集中给出了弱粗数的定义, 弱粗数是模糊数和实数的推广。某些弱粗区间数和弱粗三角数的性质得到了深入的研究。

关键词: 模糊集; 模糊数; 粗集; 弱粗三角数

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 05-0119-03

1 弱粗数提出的背景

粗集理论是一种研究信息不确定、不精确、不完善系统的新数学工具, 它是波兰数学家 Pawlak^[1] 在1982年引入的。粗集理论有着非常广泛的应用, 是处理不确定、不精确、不完善系统的一种有效方法, 已被广泛地应用于专家系统、决策支持系统、机器学习、归纳推理、模式识别等领域^[2-4]。虽然粗集理论已有了很多的论文, 但我们还未发现有关粗数的研究。本文将引入并研究弱粗数, 它是模糊数和实数的推广。

尽管模糊集和粗集是不同的概念, 但彼此还是有联系。Zadeh在1965年引入模糊集理论来表示不清楚的概念。 X 上的一个模糊集被定义为一个函数 $\mu: X \rightarrow [0, 1]$, 若 A 是一个 X 上的模糊集, 则 $\mu_A(x)$ 是 x 属于 A 的程度, $\mu_{A^c}(x)$ 是 x 不属于 A 的程度, 且

$$\mu_A(x) \in [0, 1],$$

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \in [0, 1]$$

一般地, X 上的模糊集称为模糊点, 如果它除了 x 点外都取0值。而模糊数 F 也是一个模糊集, 并在实轴上满足正规和凸性的条件^[5]。

2 弱粗点的性质

现在回顾粗集^[6]的定义。

设 U 是非空集, B 是 U 的子集的布尔代数 $T(U)$ 的一个完备子代数。序对 (U, B) 称为分行粗域。若 $V = (U, B)$ 是给定的粗域, R 是定义如下的关系:

$$A = (A_L, A_U) \in R$$

当且仅当 $A_L, A_U \in B, A_L \subseteq A_U$

则将 R 的元素称为粗集。

设 $A = (A_L, A_U)$ 和 $B = (B_L, B_U)$ 是两个粗集,

则

$$A \cup B = (A_L \cup B_L, A_U \cup B_U);$$

$$A \cap B = (A_L \cap B_L, A_U \cap B_U);$$

$$A \subseteq B \text{ 当且仅当 } A \cap B = A$$

容易看出 $A \subseteq B$ 当且仅当 $A_L \subseteq B_L$ 和 $A_U \subseteq B_U$ 。

既然模糊概念与精确概念不同, 它不能由本身的元素来刻画, 因此本文假定任何模糊概念可以用一对精确概念来表示——称为模糊概念的上下近似集。设 R 是实数全体, 下面我们考虑 R 上的弱粗集和弱粗数。

定义1 弱粗集 A 是 R 上的序对 (A_L, A_U) , 下近似集 $A_L \subseteq R$ 和上近似集 $A_U \subseteq R$, 并且 $A_L \subseteq A_U$ 。

A 是弱粗集的意思是如果一个点在 A_L , 则肯定它是属于弱粗集 A 。如果一个点在 $A_U \setminus A_L$, 则无法肯定它是属于, 还是不属于弱粗集 A 。如果一个点在 A_U , 则肯定它是不属于弱粗集 A 。

设 $A = (A_L, A_U)$ 和 $B = (B_L, B_U)$ 是两个弱粗集, 则

$$A \cup B = (A_L \cup B_L, A_U \cup B_U);$$

$$A \cap B = (A_L \cap B_L, A_U \cap B_U);$$

$$A \subseteq B \text{ 当且仅当 } A_L \subseteq B_L \text{ 和 } A_U \subseteq B_U;$$

性质1 设 A, B 和 C 是弱粗集, 则

$$(1) A \cup B = B \cup A$$

$$(2) A \cap B = B \cap A$$

$$(3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(5) A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

* 收稿日期: 2003-02-26

基金项目: 教育部人文社会科学重点研究基地重大资助项目 (2000ZDX720 40002); 教育部跨世纪人才基金资助项目 (99JA720001)

作者简介: 黎永锦 (1963年生) 男, 副教授; E-mail: stslj@zsu.edu.cn

$$(6) A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

定义 2 弱粗集数 A 是 R 的序对 (A_L, A_U) , 这里 $A_L \subseteq A_U$, 且 A_L 和 A_U 是 R 的子集。

定义 3 弱粗区间数 A 是 R 的序对 (A_L, A_U) , 这里 $A_L \subseteq A_U$, 且 A_L 和 A_U 是区间。即 $A_L = [a^-, a^+]$, $A_U = [b^-, b^+]$, $a^- \geq b^-$ 和 $a^+ \leq b^+$ 。

例子 设 x 是年龄, $A = (A_L, A_U) = ([35, 45], [25, 55])$, 如果某人是 40 岁, 则可以肯定他是中年人, 如果他是 50 岁, 则无法可以肯定他是不是中年人。如果他是 70 岁, 则可以肯定他不是中年人, 因此弱粗区间数 A 是一个模糊概念, 它指的就是“中年”。

回顾 $F = (b^-, a^-, a^+, b^+)$ 是梯形模糊数是指: 若 $x \in [a^-, a^+]$, 则 $\mu_F(x) = 1$; 若 $x \in [b^-, a^-]$, 则 $\mu_F(x) = \frac{x - b^-}{a^- - b^-}$; 若 $x \in [a^+, b^+]$, 则 $\mu_F(x) = \frac{b^+ - x}{b^+ - a^+}$; 若 $x \in (-\infty, b^-) \cup (b^+, +\infty)$ 则 $\mu_F(x) = 0$ 。

容易看出对任意梯形模糊数 $F = (b^-, a^-, a^+, b^+)$, 令 $A_L = [a^-, a^+]$, $A_U = [b^-, b^+]$, 则 $A = (A_L, A_U)$ 就是弱粗区间数, 因此弱粗区间数就是 R 上梯形模糊数的推广。

现在考虑弱粗区间数之间的序关系 $\leq$ 。

设 W 是 R 上弱粗区间数全体, 若 $P, Q \in W$, $P = ([a^-, a^+], [b^-, b^+])$, $Q = ([c^-, c^+], [d^-, d^+])$, 则 $P \leq Q$ 当且仅当 $P \subseteq Q$, 而 $\vee$ 和 $\wedge$ 定义为

$$\begin{aligned} P \vee Q &= ([\min\{a^-, c^-\}, \max\{a^+, c^+\}], \\ &[\min\{b^-, d^-\}, \max\{b^+, d^+\}]) \\ P \wedge Q &= ([\max\{a^-, c^-\}, \min\{a^+, c^+\}], \\ &[\max\{b^-, d^-\}, \min\{b^+, d^+\}]) \end{aligned}$$

性质 2 设 W 是 R 上的弱粗区间数全体, 则 $(W, \leq, \vee, \wedge)$ 是一个分配格。

下面考虑弱粗区间数的运算。

定义 4 设 P_1, P_2 是弱粗区间数, $P_1 = ([a^-, a^+], [b^-, b^+])$, $P_2 = ([c^-, c^+], [d^-, d^+])$ 和 $\lambda \geq 0$, 则:

(1) $P = (P_L, P_U) = ([e^-, e^+], [f^-, f^+]) = P_1 + P_2$ 定义为

$$\begin{aligned} P_L &= [e^-, e^+] = [a^- + c^-, a^+ + c^+] \\ P_U &= [f^-, f^+] = [b^- + d^-, b^+ + d^+] \end{aligned}$$

(2) $P = (P_L, P_U) = ([e^-, e^+], [f^-, f^+]) = P_1 - P_2$ 定义为

$$P_L = [e^-, e^+] = [a^- - c^+, a^+ - c^-]$$

$$P_U = [f^-, f^+] = [b^- - d^+, b^+ - d^-]$$

(3) 对任意的 $\lambda \geq 0$, 乘积 λP_1 定义为

$$\begin{aligned} \lambda P_L &= [e^-, e^+] = \lambda[a^-, a^+] = [\lambda a^-, \lambda a^+] \\ \lambda P_U &= [f^-, f^+] = \lambda[b^-, b^+] = [\lambda b^-, \lambda b^+] \end{aligned}$$

(4) 乘积 $(-1)P_1$ 定义为

$$\begin{aligned} P_L &= [e^-, e^+] = (-1)[a^-, a^+] = \\ &[-a^+, -a^-] \\ P_U &= [f^-, f^+] = (-1)[b^-, b^+] = \\ &[-b^+, -b^-] \end{aligned}$$

性质 3 设 W 是 R 的弱粗区间数全体, 则 $(W, +)$ 是一个交换半群, 零元为 $0 = ([0, 0], [0, 0])$ 。

性质 4 设 W 是 R 的弱粗区间数全体, $P, Q \in W$, 则

- (1) $-(-P) = P$
- (2) $P \leq Q$, 当且仅当 $-P \leq -Q$
- (3) 若 $P \leq Q$, 则 $P + R \leq Q + R$
- (4) 若 $P \leq Q$, 则 $P - R \leq Q - R$
- (5) $P - Q = 0$, 当且仅当 $P = Q$
- (6) $P - Q = P + (-Q)$
- (7) $P - 0 = P, 0 - P = -P$

性质 5 设 W 是 R 的弱粗区间数全体, $P, Q, R \in W$, 则

- (1) $(P \vee Q) + R = (P + R) \vee (Q + R)$
- (2) $(P \wedge Q) + R = (P + R) \wedge (Q + R)$
- (3) $(P \vee Q) - R = (P - R) \vee (Q - R)$
- (4) $(P \wedge Q) - R = (P - R) \wedge (Q - R)$
- (5) $R - (P \vee Q) = (R - P) \vee (R - Q)$
- (6) $R - (P \wedge Q) = (R - P) \wedge (R - Q)$

性质 6 设 W 是 R 的弱粗区间数全体, $P, Q, R \in W$, 则 $(P - Q) - R = P - (Q + R)$ 。

定义 5 设 $A = (A_L, A_U)$ 是弱粗集, 如果 $A_L = \{x\}$, 则称 A 是一个弱粗点, 记为 $\text{wip } x$ 。

容易看出对于弱粗集 $A = (A_L, A_U)$, 有 $A = \bigcup \{\text{wip } x \mid x \in A_L\}$ 。

定义 6 设 $A = (A_L, A_U)$ 是弱粗集, $A_L \subseteq R$, $A_U \subseteq R$, 若 $A_L = \{x\}$, 则称 A 是弱粗数。

定义 7 设 P_x, P_y 是 R 的弱粗数, $P_x = (\{x\}, P_U^x)$, $P_y = (\{y\}, P_U^y)$, 和 $\lambda \geq 0$, 则

- (1) $P_x + P_y = (\{x + y\}, \{a + b \mid a \in P_U^x, b \in P_U^y\})$
- (2) $P_x - P_y = (\{x - y\}, \{a - b \mid a \in P_U^x, b \in P_U^y\})$

(3) 对任意的 $\lambda \geq 0$, 乘积 λP_x 定义为 $\lambda P_x = (\{\lambda x\}, \{\lambda a \mid a \in P_U^x\})$

(4) 乘积 $(-1)P_x$ 定义为: $\lambda P_x = (\{(-1)x\}, \{(-1)a \mid a \in P_x\})$ 。

定义 8 设 $A = (A_L, A_U)$ 是弱粗集, $A_L \subseteq R, A_U \subseteq R$, 若 $A_L = \{x\}$ 和 $A_U = [b^-, b^+]$, 则称 A 是弱粗三角形数, 记为 $wtr\ x$ 。

一般地, 三角形数 $F = (a, b, c)$ 是指 $\mu_F(b) = 1$, 并且当 $x \in [a, b]$ 时, 有 $\mu_F(x) = (x - a) / (b - a)$; 当 $x \in [b, c]$ 时有 $\mu_F(x) = (c - x) / (c - b)$; 当 $x \in (-\infty, a) \cup (c, +\infty)$ 时有 $\mu_F(x) = 0$ 。容易看出弱粗三角形数就是 R 上模糊三角形数的推广。

定义 9 设 P_x, P_y 是 R 上的弱粗三角形数, $P_x = (\{x\}, [b^-, b^+])$, $P_y = (\{y\}, [d^-, d^+])$, 则 P_x 和 P_y 的距离定义为 $d(P_x, P_y) = \max\{|x - y|, |b^- - d^-|, |b^+ - d^+|\}$ 。

不难验证下面的性质成立。

性质 7 设 P_x, P_y, P_z 是弱粗三角形数, 则

- (1) $d(P_x, P_y) = d(P_y, P_x)$
- (2) $d(P_x, P_y) = 0$, 当且仅当 $P_x = P_y$
- (3) $d(P_x, P_y) \leq d(P_x, P_z) + d(P_z, P_y)$
- (4) $d(P_x, P_y) = d(P_x + P_z, P_y + P_z)$ 。

定义 10 设 P_{x_n} 和 P_{x_0} 是 R 上的弱粗三角形数, 如果 $d(P_{x_n}, P_{x_0})$ 收敛到 0, 当 $n \rightarrow \infty$, 则称 P_{x_n} 收敛到 P_{x_0} 。

粗集是一个用于处理不精确、模糊和不确定等的数学新概念, 粗集理论有着非常广泛的应用。利用以上定义, 可以在某种意义上将实数和模糊数理论推广到粗集理论。

参考文献:

[1] PAWLIAK Z. Rough sets[J] . Internat J Inform Comput Sci, 1982, 11: 341—335.
[2] PAWLIAK Z. Rough sets, decision algorithms and Bayes' theorem[J] . European J Oper Res, 2002, 136: 181—189.
[3] PAWLIAK Z. Rough sets. Present state and the future. rough sets — state of the art and perspectives[J] . Found Comput Decision Sci, 1993, 18: 157—166.
[4] PAWLIAK Z. Rough logic[J] . Bull Polish Acad Sci Tech Sci, 1987, 35: 253—258.
[5] CHANAS S. On the interval approximation of a fuzzy number [J] . Fuzzysets and Systems, 2001, 122: 353—356.
[6] IWINSKI T B. Algebraic approach to rough sets[J] . Bull Polish Acad Sci Math, 1987, 35: 673—683.

Weak Rough Numbers

LI Yong jin

(The Institute of Logic and Cognition //Department of Mathematics,
Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A definition of weak rough number in weak rough sets is given, the weak rough number being a generalization of fuzzy number and real number in R . Some properties of weak rough interval number and weak rough triangular number are proved.

Key words: fuzzy sets; fuzzy numbers; rough sets; weak rough sets; weak rough numbers