

玻尔摆振动观测及其相图分析^{*}

黄镜荣, 崔新图, 李达亮, 冯远军, 芦东昱

(中山大学物理科学与工程技术学院, 广东 广州 510275)

摘要: 对玻尔摆的自由振动、阻尼振动、受迫振动等各类现象进行深入讨论, 并采用相图方法对实验结果进行分析。

关键词: 自由振动; 阻尼振动; 受迫振动; 相图

中图分类号: O321 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) S1-0039-03

玻尔摆的振动状态一般有自由振动、阻尼振动和受迫振动, 一般通过测量玻尔摆的运动周期, 得到玻尔摆的固有频率和阻尼系数等一系列的数据, 进一步分析玻尔摆处于受迫振动情况下的幅频特性曲线和相频特性曲线。本文采用计算机数据采集方法, 不仅获得玻尔摆的基本数据, 还可以对玻尔摆运动进行相图分析。

1 实验原理与技术

1.1 玻尔摆的阻尼振动

根据转动定律可列出玻尔摆的运动方程:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -c\theta - r \frac{d\theta}{dt}$$

即

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{r}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{c}{I} \theta = 0 \quad (1)$$

其中, c 为扭转系数, r 为阻矩系数, I 为玻尔摆的转动惯量, θ 为玻尔摆的角位移。令 $\frac{r}{I} = 2\beta$ (β 称为阻尼因数), $\frac{c}{I} = \omega_0^2$ (ω_0 称为固有圆频率)^[1], 则式(1)的解为

$$\theta = A_0 \exp(-\beta t) \cos \frac{2\pi}{T} t = A_0 \exp(-\beta t) \cos \omega t \quad (2)$$

其中, A_0 为玻尔摆的初始振幅, T 为玻尔摆作阻尼振动的周期, 且 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 。

若测得初始振幅 A_0 及第 n 个周期时的振幅 A_n , 并测得摆动 n 个周期所用的时间 nT , 则有

$$\frac{A_0}{A} = \frac{A_0}{\exp(-\beta nT)} = \exp(\beta nT)$$

所以

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \frac{A_0}{A}$$

(2) 式对时间求导得

$$\dot{\theta} = -\beta A_0 \exp(-\beta t) \cos \omega t - \omega A_0 \exp(-\beta t) \sin \omega t \quad (3)$$

将(2)和(3)式代入到 $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ 得到角度和角速度的关系:

$$(\beta^2 + \omega^2) \theta^2 + 2\beta \theta \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 = \omega^2 A_0^2 \exp(-2\beta t) \quad (4)$$

此为平面螺旋线的方程。

1.2 玻尔摆的受迫振动

当玻尔摆在有阻尼的情况下受到简谐外力矩作用时, 就会作受迫振动。设外加简谐力矩通过弹簧加到摆轮上, 其频率是 ω , 幅度为 M_0 ($M_0 = c\theta_0$, θ_0 为外力矩角幅), 且有 $M_{\text{外}} = M_0 \cos \omega t$, 则玻尔摆的运动方程变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = h \cos \omega t \quad (5)$$

其中 $h = M_0/I$, 在稳态情况下, 式(5)的解是

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

其中 A 为角振幅, 由下式表示

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (7)$$

而角位移 θ 与简谐外力矩之间的位相差 φ 则由下式表示

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (8)$$

由式(7)可见, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 振幅 A 接近外力

* 收稿日期: 2004-02-06

基金项目: 国家基础人才培养基金资助项目; 中山大学教学改革研究(一类)课题资助项目

作者简介: 黄镜荣(1978年生), 男, 助教; E-mail: mancycle@21cn.com

矩角幅 θ_0 (因为 $h = \frac{M_0}{I} = \frac{c\theta_0}{I} = \omega_0^2 \theta_0$), 随着 ω 的逐渐增大, 振幅 A 将随之增加, 当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时, 振幅 A 有最大值, 此时称为共振, 此频率称为共振频率, 即 $\omega_{共} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. 当 $\omega > \omega_{共}$ 或 $\omega < \omega_{共}$ 时, 振幅都将减小, 当 ω 很大时, 振幅趋于零^[3].

由式(8)可见, 当 $0 \leq \omega \leq \omega_0$ 时, 有 $0 \geq \varphi \geq -\frac{\pi}{2}$, 即受迫振动的位相落后于外加简谐力矩的位相; 在共振情况下, 位相落后接近于 $\frac{\pi}{2}$, 而在 $\omega = \omega_0$ 时(有阻尼时不是共振状态), 位相才正好落后 $\frac{\pi}{2}$; 当 $\omega > \omega_0$ 时, 有 $\tan \varphi > 0$, 此时应有 $\varphi < -\frac{\pi}{2}$, 即位相落后得更多; 当 $\omega \gg \omega_0$ 时, φ 趋近 $-\pi$, 即接近于反位相. 在已知 ω_0 及 β 的情况下, 则可由式(8) 计算出各 ω 值所对应的 φ 值^[3].

同样的, 可以得到共振时候角度和角速度的关系:

$$\frac{\theta^2}{A^2 \omega^2} + \frac{\theta^2}{A^2} = 1$$

(9)

此为椭圆方程.

实验过程中采用德国 PHYWE 公司的波尔共振仪来研究玻尔摆的振动. 将一条细线的一头固定在共振仪的黄色铜盘上, 另一头绕过转动传感器的转轮绑住一个砝码. 在共振仪铜盘转动的时候, 通过细线的作用, 转动传感器也跟着同步转动. 共振仪的振动状态就转到了传感器上, 通过数据采集卡与转动传感器连接使计算机直接获得扭摆的振动状态, 并进一步进行相图分析.

2 实验结果与分析

数据采集分别记录了自由振动、阻尼振动和受迫振动玻尔摆角位移随时间的变化关系, 通过进一步数据处理获得各种振动状态的角速度、角加速度与时间的关系. 由此, 得到振动的周期 T , 以及角位移、角速度、角加速度三者的相位关系.

2.1 阻尼振动的相图分析

图1是阻尼电压分别为 4 V 和 6 V 时的相图, 它体现了玻尔摆转动角度和角速度的关系. 从图上可以明显的看出振动的情况与衰减的趋势, 是平面螺旋线, 符合公式 (4). 由公式 (4) 知阻尼电压越大, 阻尼系数 β 就越大, 螺旋线的收敛半径就越大, 振动越容易停止. 从图所示可以看到这种变化, 阻尼电压越大, 图线分的越开, 更快的趋近平

衡点(即振动停止). 相图很好的反映了阻尼振动的状态.

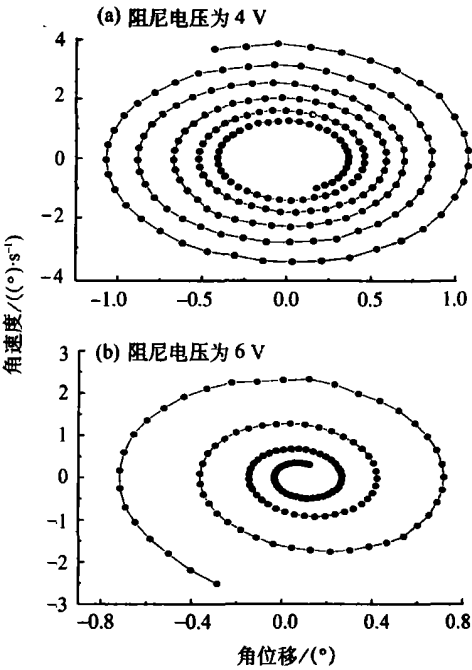


图 1 阻尼振动相图
Fig. 1 Phase graph of damped oscillation

2.2 自由振动的相图分析

由于空气的阻力和玻尔摆本身具有的阻力矩, 所谓的自由振动也是阻尼振动的情况, 是一种轻阻尼状态. 从图2可看到玻尔摆处于“自由振动”时的情况, 玻尔摆在自由振动的时候回到平衡点的过程比较缓慢, 图线绕的比阻尼振动的两个图要密, 很好的反映了自由振动的状态.

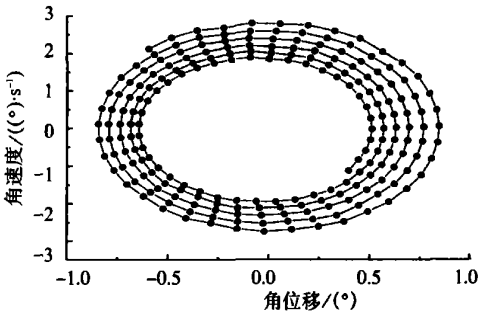


图 2 自由振动相图
Fig. 2 Phase graph of free oscillation

2.3 受迫振动的相图分析

如图3所示, 当玻尔摆处于共振状态时候, 其相图很好的符合了式 (9), 是一个椭圆轨迹. 充分体现共振的状态.

从

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = h \cos \omega t$$

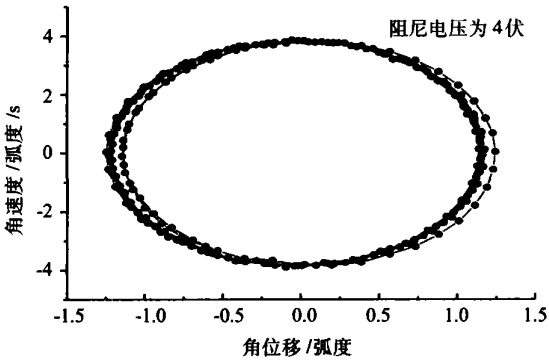


图3 受迫振动共振状态相图

Fig 3 Phase graph of resouance state in forced oscillation

可知, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 项是玻尔摆的角加速度, $2\beta\frac{d\theta}{dt}$ 项是玻尔摆的阻力矩(角速度越大, 阻力矩越大)。从图 4 可以看出玻尔摆的阻力矩跟角加速度的关系, 上图所围面积的大小体现了阻力矩的大小, 阻尼电压越小, 角速度越大, 角加速度越大, 阻力矩就越大。

3 结 论

传统的物理实验一般侧重于测量玻尔摆的固有频率和阻尼系数等参数, 研究玻尔摆处于受迫振动情况下的幅频特性曲线和相频特性曲线。本文采用计算机数据采集方法, 不仅获得玻尔摆的基本数据, 还可以对玻尔摆运动进行相图分析。若引进非线性力, 将可以更加直观的观察混沌现象。

致 谢: 本论文工作得到李潮锐博士的悉心指导和中山大学珠海校区基础物理实验室提供的技术支持, 在此表示衷心的感谢。

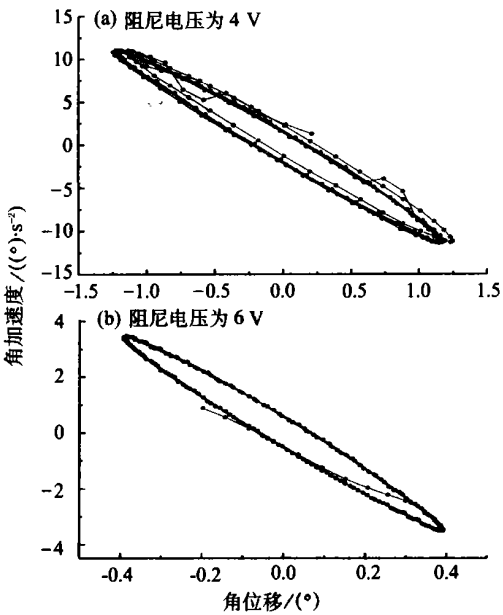


图 4 角位移与加速度关系

Fig 4 Relation of angle displacement and acceleration

参考文献:

[1] 罗质华. 对扭摆阻尼振动的研究[J]. 广东教育学院学报, 2001(5).
[2] 原所佳. 过阻尼振动与临界阻尼振动的一种差别方法[J]. 济南交通高等专科学校学报, 2002(3).
[3] 王忆, 杨玉屏, 赵健生. 受迫阻尼振动系统动力学性质的研究[J]. 大学物理, 2001(2).
[4] 马学坤. 线性受迫阻尼振动发生共振的条件及特征[J]. 大学物理, 2001(2).

Observation and Data Analysis in Phase Space for Pohl Pendulum

HUANG Jing rong, CUI Xin tu, LI Da liang, FENG Yuan jun, LIU Dong yu
(School of Physics Science and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The processes of free, damped and forced oscillation on Pohl pendulum are observed and analyzed in phase space. The results show tat the method used will be helpful for data analysis in non-linear oscillation.
Key words: Pohl pendulum; data acquisition; oscillation