

Willis 环上脑动脉瘤模型的混沌分析^{*}

杨翠红, 朱思铭

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 研究如下的 Willis 环上的脑动脉瘤模型: $\ddot{x} + \epsilon \mu x + \alpha x + \gamma x^3 = \epsilon F \cos \omega t$. 首先阐明了 Smale 马蹄变换意义下的混沌是 Devaney 混沌, 然后用 Melnikov 函数方法得到了在两种情况下该模型存在 Devaney 混沌的条件.

关键词: Smale 马蹄; 混沌; 脑动脉瘤; 同宿环; 异宿环

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 03-0001-03

1 脑动脉瘤模型简介

脑动脉瘤是由于多种原因造成的脑动脉血管壁上的异常膨出, 多形如囊状, 通常被医生形象地称为颅内炸弹. 由于瘤壁不健全, 常发生破裂, 引起蛛网膜下腔出血, 临床表现为急骤起病的剧烈头痛、呕吐、意识障碍、脑膜刺激症和血性脑脊液. 动脉瘤破裂的死亡率和致残率都很高, 首次破裂出血有 45% 的死亡率, 而再次破裂的死亡率更高. 由于脑动脉瘤的瘤体较小, 一般不引起临床症状, 也不容易被发现, 而 Willis 环 (即颅底动脉环) 又是脑动脉瘤的高发病区, 所以通过研究 Willis 环上的脑动脉瘤的数学模型来预见和控制脑动脉瘤的形成和生长情况非常必要.

Austin^[1] 通过实验, 导出了一个 Willis 环上的脑动脉瘤模型

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = F \cos \omega t \quad (1)$$

曹进德等^[2] 经过再分析, 得到了具有阻尼项和受迫激励的 Duffing 方程

$$\ddot{x} + \mu x + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = F \cos \omega t \quad (2)$$

文献[2—4] 分别对 Willis 环上的脑动脉瘤模型的周期解和概周期解作了研究.

本文研究如下的 Willis 环上的脑动脉瘤模型

$$\ddot{x} + \epsilon \mu x + \alpha x + \gamma x^3 = \epsilon F \cos \omega t \quad (3)$$

首先阐明了 Smale 马蹄变换意义下的混沌是 Devaney 混沌, 然后用 Melnikov 函数方法得到了在两种情况下该模型存在 Devaney 混沌的条件.

2 Smale 马蹄与 Devaney 混沌

混沌的数学定义至今仍未统一, 比较常见的是

Li-York 定义^[5] 和 Devaney 定义^[6]. 下面叙述混沌的 Devaney 定义. 为此先引入拓扑传递和初值敏感的概念^[6,7].

设 (X, f) 是紧致系统.

定义 1 f 叫拓扑传递的, 如果存在 $x \in X$, 使得 $\text{orb}(x) = X$, 即 x 的轨道在 X 内处处稠密.

定义 2 如果存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $x \in X$ 和 x 的任何邻域 U , 能找到 $y \in U \cap X$ 和 $n > 0$, 使得 $d(f^n(x) - f^n(y)) > \delta$

则称 f 对出初值敏感依赖, δ 称为敏感常数.

Devaney 所定义的混沌如下:

定义 3 如果下述 3 个条件满足, ① f 是拓扑传递的; ② f 的周期点在 X 中处处稠密, ③ f 是对初始条件敏感依赖的; 则称 f 在 Devaney 意义下是混沌的.

周作领^[7] 对这个定义分析以后, 发现条件③是条件①和②的直接推论, 因此提出了修改的 Devaney 混沌的定义如下:

定义 4 若 f 满足定义 3 中的条件①和②, 就称 f 是在修改的 Devaney 意义下是混沌的 (在本文中简称为 Devaney 混沌).

接下来叙述 Smale 马蹄和符号动力系统的相关定理. 设 $\Psi: Q \rightarrow R^2$ 是从 Q 到 $\Psi(Q)$ 的同胚, 满足产生 Smale 马蹄的条件, $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. 下面是推广的 Smale 定理^[8].

定理 1 Δ 是 Ψ 的紧致不变集, $\Psi|_{\Delta}$ 拓扑共轭于 (双边) 符号动力系统 $\sigma: \Sigma(N) \rightarrow \Sigma(N)$.

其中, Δ 的定义和 Ψ 满足的条件详见文[8]. 下面是关于符号动力系统的性质的定理^[8].

定理 2 符号动力系统 $\sigma: \Sigma(N) \rightarrow \Sigma(N)$ 具有

* 收稿日期: 2002-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10071097)

作者简介: 杨翠红 (1975 年生) 女, 博士研究生; 通讯联系人: 朱思铭; E-mail: mcp00ych@student.zsu.edu.cn

以下性质: ① σ 的周期点集在 $\Sigma(N)$ 中稠密, 即 $\overline{\text{Per}(\sigma)} = \Sigma(N)$; ② σ 有一条轨道在 $\Sigma(N)$ 中稠密。

由前面所述的定义和定理, 不难得到下面的定理:

定理 3 Ψ 若产生 Smale 马蹄, Δ 是 Ψ 的紧致不变集, 那么 $\Psi|_{\Delta}$ 在修改的 Devaney 意义下是混沌的。也即 Smale 马蹄变换意义下的混沌是 Devaney 混沌。

3 由异宿环引起的混沌

方程 (3) 又可以写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x - \gamma x^3 - \epsilon \mu y + \epsilon F \cos \omega t \end{cases} \tag{4}$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 系统 (4) 是一个哈密顿系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x - \gamma x^3 \end{cases} \tag{5}$$

系统 (5) 有如下的哈密顿函数

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\gamma}{4}x^4 \tag{6}$$

当 $\alpha > 0, \gamma < 0$ 时, 系统 (5) 有 3 个奇点, $O(0, 0)$ 为中心, $A_1(-\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0)$ 和 $A_2(\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0)$ 为 2 个鞍点。因为

$$H\left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}, 0\right) = H\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}, 0\right) = -\frac{\alpha^2}{4\gamma}$$

所以系统 (5) 存在连接两个鞍点的异宿环。相应于异宿轨线, 有

$$H(x, y) = -\frac{\alpha^2}{4\gamma},$$

由此可以得到异宿轨线的方程为

$$\begin{cases} x_{\pm}^0(t) = \pm \tanh\left[\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}}t\right] \\ y_{\pm}^0(t) = \pm \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}} \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}}t\right] \end{cases} \tag{7}$$

与异宿轨线对应的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\pm}^0(t) \cdot [-\mu y_{\pm}^0(t) + F \cos \omega(t+t_0)] dt = \mu T_1 \pm FT_2 \cos \omega t_0$$

其中

$$I_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}},$$
$$I_2 = \frac{\pi \omega}{\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}}} \operatorname{csch} \frac{\pi \omega}{2 \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}}}$$

易见当 $\frac{F}{\mu} > \frac{I_1}{I_2}$ 时, 存在 $t_0^{\pm}$ 使得 $M_{\pm}(t_0^{\pm}) = 0$ 。

又因为

$$M'_{\pm}(t_0^{\pm}) = -\omega FI_2 \sin \omega t_0^{\pm} \neq 0$$

所以 $t_0^{\pm}$ 是 $M_{\pm}(t_0^{\pm})$ 的单根。由 Melnikov 函数判别方法^[9, 10] 可知系统 (4) 存在 Smale 马蹄, 由定理 3 可知系统 (4) 在修改的 Devaney 意义下是混沌的。

这里

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{2\alpha\gamma}{3\pi\omega} \sinh \frac{\pi\omega}{\sqrt{-2\alpha\gamma}}$$

是系统 (4) (亦即系统 (3)) 的阈值。于是有下面的定理:

定理 4 当参数 $\alpha > 0, \gamma < 0, F > -\mu \frac{2\alpha\gamma}{3\pi\omega} \sinh \frac{\pi\omega}{\sqrt{-2\alpha\gamma}}$ 时, 系统 (3) 在修改的 Devaney 意义下是混沌的。

4 由同宿环引起的混沌

当 $\alpha < 0, \gamma > 0$ 时, 系统 (5) 有 3 个奇点, $O(0, 0)$ 为鞍点, $A_1(-\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0)$ 和 $A_2(\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0)$ 为 2 个中心。与 $H(x, y) = 0$ 对应的轨线为“8”字形的同宿环。

由 $H(x, y) = 0$ 可以得到同宿轨线的方程为

$$\begin{cases} x_{\pm}^0(t) = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}t\right] \\ y_{\pm}^0(t) = \pm \frac{2\alpha}{\gamma} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}t\right] \tanh\left[\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}t\right] \end{cases} \tag{8}$$

同宿轨线对应的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\pm}^0(t) \cdot [-\mu y_{\pm}^0(t) + F \cos \omega(t+t_0)] dt = \mu T_1 \pm FT_2 \cos \omega t_0$$

其中

$$T_1 = \pi, T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}} \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}}$$

易见当 $\frac{F}{\mu} > \frac{T_1}{T_2}$ 时, 存在 $t_0^{\pm}$ 使得 $M_{\pm}(t_0^{\pm}) = 0$ 。

又因为

$$M'_{\pm}(t_0^{\pm}) = -\omega FT_2 \sin \omega t_0^{\pm} \neq 0$$

所以 $t_0^{\pm}$ 是 $M_{\pm}(t_0^{\pm})$ 的单根。

由 Melnikov 函数判别方法^[9, 10] 可知系统 (4) 存在 Smale 马蹄, 由定理 3 可知系统 (4) 在修改的 Devaney 意义下是混沌的。

这里

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \cosh\left[\pi\omega \sqrt{\frac{8\alpha}{\gamma}}\right]$$

是系统(4) (亦即系统(3)) 的阈值。于是有下面的定理:

定理 5 当参数 $\alpha < 0, \gamma > 0, F > \mu \sqrt{-\frac{2\alpha}{\gamma}}$ 。
 $\cosh\left[\pi\omega\sqrt{-\frac{8\alpha}{\gamma}}\right]$ 时, 系统 (3) 在修改的 Devaney 意义下是混沌的。

众所周知, 混沌控制在机械、电子、光学特别是生物医学方面有着广泛的应用前景。在一些实际问题中, 混沌状态是很有益的行为。例如, 在心脏动力系统中存在混沌, 这时混沌状态是有益的状态^[11]。在本文所述的 Willis 环上的脑动脉瘤模型中, 混沌状态究竟是有益的状态还是有害的状态, 还有待于医学实验的进一步研究。如果是有害的状态, 人们需要尽量避免混沌的产生。反之, 如果是有益的状态, 人们可以采取各种措施来控制模型中的参数, 使之符合定理 4 或者定理 5 中的条件, 使脑动脉瘤中产生混沌, 从而使病情朝着有益的方向发展 (这包括使脑动脉瘤避免破裂、逐渐减小甚至消失等, 具体结果有待于医学实验的证明)。

参考文献:

[1] AUSTIN G. Biomathematical model of aneurysm of the circle

of Willis, 1. The Duffing equation and some approximate solutions[J] . Math Bioscience, 1971, 11: 163— 172.
[2] 曹进德, 赵晓华. Willis 环状脑动脉瘤生物数学模型的无结周期解与拟周期解[J] .生物数学学报, 1994, 9(5): 101— 104.
[3] 冯春华. Willis 环状脑动脉瘤生物数学模型的周期与概周期解[J] .生物数学学报, 1998, 13(1): 61— 64.
[4] 杨启贵, 江佑林. Willis 环状脑动脉瘤模型的概周期解[J] .生物数学学报, 1998, 13(5): 671— 674.
[5] LI T Y, YORK J A. Period three implies chaos[J] . Amer Math Monthly, 1975, 82: 985— 992.
[6] DEVANEY R L. An introduction to chaos dynamical systems [M] . Sencond ed. Addison-Wesley Publishing Company Inc. , 1989.
[7] 周作领. 符号动力系统[M] . 上海: 上海科技教育出版社, 1997.
[8] 张筑生. 微分动力系统原理[M] . 北京: 科学出版社, 1987.
[9] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M] . 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
[10] 李继彬, 冯贝叶. 稳定性分支与混沌[M] . 昆明: 云南科技出版社, 1995.
[11] BRANDT M E, CHEN G. Bifurcation control of two nonlinear models of cardiac activity[J] . IEEE Trans Circuits Syst I, 1997, 44: 1031— 1034.

Chaos Behavior of the Model of Aneurysm of the Circle of Willis

YANG Cui hong, ZHU Si ming
(Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The model of saccular aneurysm of the circle of Willis $\ddot{x} + \epsilon t \dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = \epsilon F \cos \omega t$ is studied. It is shown that the chaos in the sense of Smale Horseshoe is in fact in the sense of Devaney, and the conditions of the existence of the Devaney chaos of the model in two cases are obtained.
Key words: Smale Horseshoe; chaos; aneurysm; heteroclinic cycle; homoclinic cycle