

用拉格朗日乘数法 求实际气体任意过程的温度最值*

苏万春

(广州航海高等专科学校, 广东 广州 510725)

摘 要: 给出了一种普遍求解实际气体经过任意过程温度最值的一种计算方法, 并以实际气体经过直线过程为例进行了讨论。

关键词: 拉格朗日乘数法; 实际气体; 任意过程; 温度最值

中图分类号: O55 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) S1-0272-02

1 问题的提出

计算理想气体任意热力学过程的最高或最低温度, 文献[1]给出了3种不同的求解方法, 而对于实际气体经过任意热力学过程温度最值的求解, 普通物理教材中较少提及, 我们能不能找到一种普遍适用的方法进行求解呢? 本文给出了一种普遍方法——拉格朗日乘数法。

2 实际气体经过任意过程温度最值的求解

我们知道处于平衡态的某种物质的热力学参量 (P, V, T) 满足物态方程 $f(P, V, T) = 0$, 也可表示为 $T = T(p, v)$ 。当实际气体经过任意热力学过程, 在 $P - V$ 图中, 等温线可用隐函数 $\Phi(p, v) = 0$ 表示。现在的问题是: 求满足 $T = T(p, v)$ 的实际气体在约束条件 $\varphi(p, v) = 0$ 下的温度最值问题, 即

$$\begin{cases} T = T(p, v) \\ \text{约束条件 } \varphi(p, v) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

引入拉格朗日函数 $F(p, v, \lambda)$, 则有

$$F(p, v, \lambda) = T(p, v) + \lambda \varphi(p, v) \quad (2)$$

式中 λ 为拉格朗日乘数。对 (2) 式求偏导数

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial P} = T'_P(P, V) + \lambda \varphi'_P(P, V) \\ \frac{\partial F}{\partial V} = T'_V(P, V) + \lambda \varphi'_V(P, V) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(P, V) \end{cases}$$

令 $\frac{\partial F}{\partial P} = 0, \frac{\partial F}{\partial V} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, 则得到三元方程组

$$\begin{cases} T'_P(P, V) + \lambda \varphi'_P(P, V) = 0 \\ T'_V(P, V) + \lambda \varphi'_V(P, V) = 0 \\ \varphi(P, V) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

求解 (3) 式得驻点 (p_0, v_0, λ_0) , 则 (p_0, v_0) 就是 $T = T(p, v)$ 在约束条件 $\varphi(p, v) = 0$ 下可能的极值点。由于温度最值是客观存在的, 所以 (3) 式的解是可能的最值点。

3 应用举例

现有 1 mol 满足范德瓦耳斯方程 $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ 的实际氧气, 在 $P - V$ 图中经过直线过程 $P = -V + 10$ (图 1)。

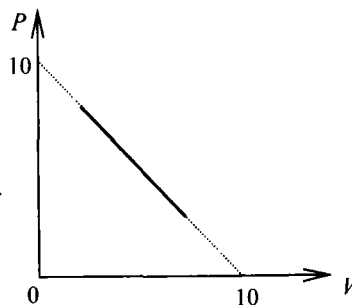


图 1 直线过程

由 (1) 式得到下面的条件极值问题:

$$\begin{cases} T = T(P, V) = \frac{1}{R} \left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) \\ \text{约束条件: } \varphi(P, V) = P + V - 10 = 0 \end{cases}$$

式中, a, b 为修正量, 由文献[2]知 $a = 1.369 \text{ atm} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{mol}^{-2}$, $b = 0.0315 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$, R 为普适气体常量,

* 收稿日期: 2003-02-20

作者简介: 苏万春 (1966 年生), 讲师; E-mail: swcszy@21cn.com

其值为 $0.082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 压强 P 、体积 V 、温度 T 的单位分别为 atm 、 L 、 K 。

建立拉格朗日函数

$$F(P, V, \lambda) = \frac{1}{R} \left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) + \lambda (P + V - 10)$$

对上式求偏导并令其为零, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{V - b}{R} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{R} \left[P + \frac{a}{V^2} - \frac{2a(V - b)}{V^3} \right] + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = P + V - 10 = 0 \end{cases}$$

代入数据得

$$\begin{cases} \frac{V - 0.0315}{0.082} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{0.082} \left[P + \frac{1.369}{V^2} - \frac{2 \times 1.369 \times (V - 0.0315)}{V^3} \right] + \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ P + V - 10 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

消去 P 与 λ , 上式变为

$$V - 0.0315 = -V + 10 + \frac{1.369}{V^2} - \frac{2.738(V - 0.0315)}{V^3}$$

经整理上式得:

$$V^4 - 5.016V^3 + 0.6845V - 0.0431 = 0 \quad (5)$$

引入函数

$$f(V) = V^4 - 5.016V^3 + 0.6845V - 0.0431$$

$$0 < V \leq 10$$

用计算机描述函数 $f(V)$ 的图形(如图 2), 并列各组 v 与 $f(v)$ 的值如下。

V	...	0.06	0.07	...	0.34
$f(V)$	...	-0.0031	0.0031	...	0.0058
	0.35	...	4.988	4.989	...
	-0.0036	...	-0.1	0.02	...

由图 2 知道: $f(v)$ 的曲线与 V 轴的交点是方程(5)的解。由上列数据可以得出 3 组 V 与 $f(V)$ 值, 即

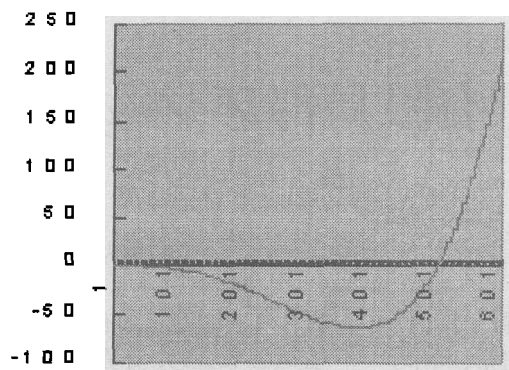


图 2 $f(V)$ 的曲线图

$$\begin{cases} P_1 = 5.011 \\ V_1 = 4.989 \end{cases}, \begin{cases} P_2 = 9.94 \\ V_2 = 0.06 \end{cases}, \begin{cases} P_3 = 9.65 \\ V_3 = 0.35 \end{cases}$$

由目标函数 $T = \frac{1}{R} \left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b)$ 得到温度分别为:

$$T_1 = \frac{1}{0.082} \left(5.011 + \frac{1.369}{4.989^2} \right) \cdot$$

$$(4.989 - 0.0315) \approx 306.277(\text{K})$$

$$T_2 = \frac{1}{0.082} \left(9.94 + \frac{1.369}{0.06^2} \right) \cdot$$

$$(0.06 - 0.0315) \approx 135.624(\text{K})$$

$$T_3 = \frac{1}{0.082} \left(9.65 + \frac{1.369}{0.35^2} \right) \cdot$$

$$(0.35 - 0.0315) \approx 80.889(\text{K})$$

由于体积不可能为零 ($V \neq 0$), 所以, 当 $V = 10, P = 0$ 时, 其温度由目标函数得到:

$$T_4 = \frac{1}{0.082} \left(0 + \frac{1.369}{10^2} \right) (10 - 0.0315) \approx 1.664(\text{K})$$

通过上述的计算, 比较 T_1, T_2, T_3, T_4 , 其最高温度为 $T_{\max} = 306.277 \text{ K}$, 最低温度为 $T_{\min} = 1.664 \text{ K}$ 。

与理想气体相比, 温度最值产生偏离的原因是实际气体中分子所能自由活动的空间不是气体所占空间的体积, 实际气体的压强并不只是分子运动引起的压强, 还有分子相互作用引起的压强。

参考文献:

- [1] 吴剑峰, 朱琴. 理想气体任意过程最高和最低温度的计算方法[J]. 大学物理, 2002, 21(6): 24-25.
- [2] 刘玉鑫. 热学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.