

静态球对称星体结构方程的不同推导与比较*

文德华¹, 陈伟², 王先菊¹, 艾保全¹, 刘国涛¹, 刘良钢¹

(1. 中山大学物理学系, 广东 广州 510275;

2. 暨南大学物理学系, 广东 广州 510632)

摘 要: 给出了两种不同的静态球对称星体结构方程的推导过程, 并对其进行了比较, 指出方法二是一种更简单、直接的推导方法。评述了该结构方程的适用范围。

关键词: 结构方程; 能量-动量张量; Einstein 场方程

中图分类号: O412.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 02-0015-03

研究像太阳等恒星类星体在自引力作用下内部物质能量、压强的分布规律时, 如果把星体物质视为理想流体, 则在牛顿理论下可用下述方程进行求解:

流体静力平衡方程:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \quad (1)$$

物态方程:

$$p = p(\rho)$$

其中, p 为压强, ρ 为密度。若给定中心密度, 利用边界条件——星体表面的压强为 0: $p(R) = 0$; 星体中心点的质量为 0: $M(0) = 0$, 就可求解星体的压强分布、密度分布、质量分布、星体半径和星体质量。

对于致密星体, 例如中子星、奇异星等, 由于星体内部的高密度和强引力场, 研究其内部结构时牛顿理论不再适用。必须从广义相对论出发, 去探知星体的内部结构, 其中最关键的就是星体内部在自身强引力场作用下的物质能量、压强的分布规律。反应这个规律的主要方程就是星体结构方程。其中最著名的方程是描述静态球对称星体内部结构的方程: Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程, 简记为 TOV 方程。TOV 方程是利用静态球对称度规和 Einstein 场方程, 在理想流体假设下推导出来的。它是目前惟一的广义相对论下描述球对称星体结构的精确方程。对于旋转和具有径向或非径向振动的致密星体, 其广义相对论下的结构目前只能近似求解。

本文将根据爱因斯坦场方程的两种不同表达形

式给出两种 TOV 方程的推导过程, 并发现第二种方法是一种更简单、更直接的方法。

1 TOV 方程的推导

静态球对称度规形式为

$$-ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

其中, ν, λ 为 r 的函数。由此可以写出协变度规张量为

$$g_{00} = -e^\nu, g_{11} = e^\lambda, g_{22} = r^2 \sin^2\theta, g_{33} = r^2 \quad (3)$$

逆变度规张量为

$$g^{00} = -e^{-\nu}, g^{11} = e^{-\lambda}, g^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}, g^{33} = \frac{1}{r^2} \quad (4)$$

其中指标 $(0, 1, 2, 3)$ 对应坐标 (t, r, θ, ϕ) 。采用的度规对角元形式为 $(-+++)$ 。

方法 1 利用场方程形式

$$R_{\alpha\beta} = -8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^\gamma_\gamma \right) \quad (5)$$

进行推导。其中指标 $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$; 采用自然单位制: $c = G = 1$ 。

Riemann-Christoffel 曲率张量定义为^[1]:

$$R^\gamma_{\alpha\beta\delta} \equiv \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\eta_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma_{\beta\eta} - \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\delta\eta}$$

Einstein 场方程中出现的 Ricci 张量 $R_{\alpha\beta}$ 就是该张量的一种线性组合, 即缩并形式

* 收稿日期: 2002-08-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10275099); 广东省自然科学基金资助项目 (001182, 021717); 华南理工大学自然科学基金资助项目 (E52660)

作者简介: 文德华 (1972 年生), 男, 博士研究生, 现工作单位为华南理工大学物理系;

通讯联系人: 刘良钢; E-mail: stdp05@zsu.edu.cn

$$R_{\alpha\beta}^{\gamma} = R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \Gamma_{\beta\eta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\gamma}$$

先求联络^[1]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

根据式(3),(4)求出联络的非零分量为

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\lambda'}{2}, \Gamma_{22}^1 = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta r, \Gamma_{33}^1 = -e^{-\lambda} r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{22}^3 = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \cot \theta$$

其中, ν' 表示对 r 求一阶微商。

由此求出 Ricci 张量的非零分量为

$$R_{00} = e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) \quad (6)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \quad (7)$$

$$R_{22} = \sin^2 \theta R_{33}$$

$$R_{33} = -1 + \frac{1}{2} e^{-\lambda} r (\nu' - \lambda') + e^{-\lambda} \quad (8)$$

其中, λ' 表示对 r 求一阶微商, ν'' 表示对 r 求二阶微商。

下面再给出场方程(5)右边的能量-动量张量的具体表达式。假设致密星内部为理想流体(致密星内部 Fermi 能 (> 60 MeV) 远大于其热能 (10^{10} K 约 1 MeV), 因此可以视为理想流体; 而对脉冲星的观测表明, 固体壳使其对理想流体的偏离仅为 10^{-5}), 则物质的能量-动量张量为

$$T_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta} + (p + \rho) u_{\alpha} u_{\beta} \quad (9)$$

其中, u 为四维速度。

根据(6)-(9)式求出方程(5)的(00)、(11)和(33)分量方程分别为

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) = -4\pi(\rho + 3p) \quad (10)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) = -4\pi(\rho - p) \quad (11)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{2r} (\nu' - \lambda') + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} = -4\pi(\rho - p) \quad (12)$$

式(10)+式(11)+2倍式(12)有

$$e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda' = 1 - 8\pi\rho r^2$$

即

$$(re^{-\lambda})' = 1 - 8\pi\rho r^2$$

上式两边对 r 积分, 有

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r} \quad (13)$$

$$\text{其中, } M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr'.$$

再由守恒定律 $T_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 0$ 给出另一个独立方程。根据张量场的散度运算, 有

$$T_{\beta;\alpha}^{\alpha} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{-1/2} T_{\beta}^{\alpha}) - g_{\gamma\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} T^{\gamma\gamma} = 0$$

对 $T_{1;\alpha}^{\alpha} = 0$ 分量方程, 有

$$(T_1^1)' + \frac{1}{2} (T_1^1 - T_0^0) \nu' + \frac{2}{r} T_1^1 - \frac{1}{r} (T_2^2 + T_3^3) = 0$$

根据(9)式, 上式可简化为

$$p' + \frac{1}{2} (p + \rho) \nu' = 0 \quad (14)$$

其中, p' 表示对 r 求一阶微商。把(13)式、(14)式代入(12)式, 有

$$-1 + \left[1 - \frac{2M(r)}{r} \right] \left[1 - \frac{rp'}{p + \rho} \right] + \frac{2M(r)}{r} - 4\pi\rho r^2 = -4\pi(\rho - p)r^2$$

从而有

$$p' = -\frac{(p + \rho)[M(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2M(r)]} \quad (15)$$

这就是著名的 TOV 方程。

方法 2 利用场方程形式

$$R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha}^{\beta} R = -8\pi T_{\alpha}^{\beta} \quad (16)$$

进行推导。

根据 $R_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = R_{\alpha}^{\beta}$ 和 $R_{\alpha\gamma} g^{\gamma\alpha} = R$, 由(6)-(8)式有

$$R_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (17)$$

$$R_1^1 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (18)$$

$$R = e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{2}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} e^{-\lambda} \quad (19)$$

对理想流体, 其能量-动量张量也可写成

$$T_{\alpha}^{\beta} = (p + \rho) u^{\beta} u_{\alpha} + p \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (20)$$

由(17)-(20)式可给出场方程(16)式的(00)和(11)分量方程分别为

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = -\frac{1}{r^2} (re^{-\lambda})' + \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho \quad (21)$$

$$R_1^1 - \frac{1}{2} R = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = -8\pi p \quad (22)$$

类似地, 由(21)式变形后两边积分可直接给出(13)式。把(13)式以及由守恒方程给出的(14)式代入(22)式, 有

$$p' = - \frac{(p + \rho)[M(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2M(r)]}$$

证毕。

在上面的两种方法中,方法2明显简单得多,它仅从场方程的(0,0)分量方程就可直接求解度规参量 $e^{-\lambda}$,而方法1需要3个分量方程联立方才可求解 $e^{-\lambda}$ 。方法2只需要场方程的(00)、(11)两个分量方程再加上由能量-动量张量守恒方程给出的静力平衡方程即可导出TOV方程,而方法1则需要场方程的3个独立方程再加上静力平衡方程。

2 对TOV方程的讨论与引申

在弱场近似下,TOV方程退化为牛顿理想流体静力平衡方程(1),比较两个方程,可以给出广义相对论修正项为

$$\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left[1 + \frac{4\pi r^3 p}{M(r)}\right] \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]^{-1}$$

利用TOV方程,与适当的物态方程相结合,加上边界条件,便可求解中子星的质量、半径、转动惯量和引力红移等性质参量。但是TOV方程是在静止球对称度规前提下推导出来的,而实际的星体应具有自转(观测表明,中子星具有较快的自转,周期在毫秒级),同时星体内部还可能具有径向或非径向运动。旋转条件下的度规形式一般记为

$$-ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + e^{2\mu} d\theta^2 + e^{2\phi} (d\phi - \omega dt)^2$$

其中, $\nu, \lambda, \mu, \phi, \omega$ 为 r, θ 的函数。对这种形式的度规要精确求解Einstein场方程是不太现实的。即使

是在非旋转条件下(即可用(2)式描述的度规),如果存在径向运动,即 $u_1 \neq 0$,度规参量 ν, λ 变为 r, t 的函数,场方程的分量方程中会出现对时间的微商项,守恒方程的 $T_{1;\mu}^{\mu} = 0$ 分量方程也变得很复杂:

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial t} + \frac{1}{2} T_1^0 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \nu}{\partial t} \right) + (T_1^1)' + \frac{1}{2} (T_1^1 - T_0^0) \nu' + \frac{2}{r} T_1^1 - \frac{1}{r} (T_2^2 + T_3^3) = 0$$

此时要求解场方程,一般都是用近似的方法,例如微扰法等。

参考文献:

- [1] [美]温伯格.引力论和宇宙论[M].邹振隆,张历宁译.北京:科学出版社,1980.
- [2] WEN D H. The energy-momentum pseudo-tensor of cylindrical gravitational waves of both polarized states[J]. Chin Phys Lett, 2002, 19(5): 626-627.
- [3] CHANDRASEKHAR S. The dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity[J]. APJ, 1964, 140: 417-433.
- [4] SCHRAMM S. Rotating neutron stars in a chiral SU(3) model[DB/OL]. //xxx.lanl.gov/abs/nucl-th/0204075, 2002.
- [5] 文德华,李芳昱.基于胡宁表述的柱面引力波能量动量张量[J].华南理工大学学报, 2000, 28(3): 126-130.
- [6] WEBER J. General relativity and gravitational waves[M]. New York: Interscience, 1961.

Deduction and Comparison of the Structure Equation of Static Spherically Symmetric Celestial Body

WEN De-hua¹, CHEN Wei², WANG Xian-ju¹, AI Bao-quan¹, LIU Guo-tao¹, LIU Liang-gang¹

(1. Department of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Physics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: Two deduction ways of the structure equation of static spherically symmetric celestial body were presented. The two deduction processes were compared and it was found that the second method is the more simple and straight one. The applying area of the structure equation was reviewed.

Key words: structure equation; energy-momentum tensor; Einstein field equation