

薄板单元新的质量矩阵及其应用^{*}

葛爱民¹, 罗 恩²

(1. 中山大学建筑设计研究所, 广东 广州 510275;

2. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 为了使 TRUNC 元能用来分析薄板动力问题, 用作者所提出的新列式方法推导出该单元的两种质量矩阵。文中算例的计算结果表明, 用 TRUNC 元和这两种新的质量矩阵分析薄板动力问题, 也具有高的精度和计算效率。

关键词: TRUNC 元; 薄板动力问题; 质量矩阵

中图分类号: O327 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 03-0095-03

国际著名有限元权威 Argyris^[1] 提出的 TRUNC 元是一种非常规三角形薄板单元, 已有研究工作表明^[2,3], TRUNC 元是一种简单、高效和精度高的薄板单元, 但是, Argyris 只给出用自然列式方法推导出的 TRUNC 元的刚度矩阵, 分析了薄板静力问题^[1]。由于 Argyris 构造 TRUNC 元的刚度矩阵所用的自然列式方法过于繁复, 其物理意义不明确, 且计算量较大, 因此不利于该元在工程中推广应用。为此, 本文作者在文 [4] 中提出一种简单、物理意义明确、计算量小和编程容易的新列式方法, 重新推导出 TRUNC 元的刚度矩阵。

为了使 TRUNC 元能用来分析薄板动力问题, 本文用新列式方法推导出该元新的质量矩阵。其中一种新的质量矩阵是首先分别构造对应广义常应变和广义变应变的质量矩阵, 然后将两者相加而成; 另一种质量矩阵就是对应广义常应变的质量矩阵。文中算例的计算结果表明, 用 TRUNC 元和这两种新的质量矩阵分析薄板动力问题, 也具有高的精度和计算效率。

1 TRUNC 元的质量矩阵

本文用文 [4] 的新列式方法推导 TRUNC 元的两种质量矩阵。

$$[A_i^1]^T = \begin{bmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}c_1(\zeta_i - \eta_i) & -\frac{1}{2}c_2(\xi_i - \zeta_i) & -\frac{1}{2}c_3(\eta_i - \xi_i) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_1(\zeta_i - \eta_i) & \frac{1}{2}b_2(\xi_i - \zeta_i) & \frac{1}{2}b_3(\eta_i - \xi_i) \end{bmatrix}$$

TRUNC 元是一种 9 自由度的三角形薄板单元, 单元的结点位移为

$$\{\bar{q}\} = [w_i \quad \phi_i \quad \Psi_i]^T \quad i = 1, 2, 3$$

式中, $\phi_i = w_{,x}$, $\Psi_i = w_{,y}$

单元结点位移向量为

$$\{\bar{q}\}^e = [\bar{\delta}_1^T \quad \bar{\delta}_2^T \quad \bar{\delta}_3^T]^T$$

单元内的挠度模式可写成为

$$w = w_c + w_v \quad (1)$$

式中对应广义常应变的挠度模式 w_c 和对应广义变应变的挠度模式 w_v 分别为

$$w_c = [N_c] \{\bar{q}\}^e = \sum_{i=1}^3 [N_c]_i \{\bar{q}\} \quad (2)$$

$$w_v = [N_v] \{\bar{q}\}^e = \sum_{i=1}^3 [N_v]_i \{\bar{q}\} \quad (3)$$

式中节点 i 的形函数为

$$[N_c]_i = [L_c] [A_i^1], \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$[N_v]_i = [L_v] [A_i^2], \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

式中

$$[L_c] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_2 L_3 \quad L_3 L_1 \quad L_1 L_2]$$

$$[L_v] = [L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2 \quad L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2 \quad L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2]$$

* 收稿日期: 2002-10-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10172097)

作者简介: 葛爱民 (1968 年生), 女, 工学硕士, 工程师; E-mail: adoc02@zsu.edu.cn

$$[A_i^2]^T = \begin{bmatrix} \zeta_i - \eta_i & \xi_i - \zeta_i & \eta_i - \xi_i \\ -\frac{1}{2}c_1(\zeta_i + \eta_i) & -\frac{1}{2}c_2(\xi_i + \zeta_i) & -\frac{1}{2}c_3(\eta_i + \xi_i) \\ \frac{1}{2}b_1(\zeta_i + \eta_i) & \frac{1}{2}b_2(\xi_i + \zeta_i) & \frac{1}{2}b_3(\eta_i + \xi_i) \end{bmatrix}$$

式中 $[\xi_1 \ \eta_1 \ \zeta_1] = [1 \ 0 \ 0]$, $[\xi_2 \ \eta_2 \ \zeta_2] = [0 \ 1 \ 0]$, $[\xi_3 \ \eta_3 \ \zeta_3] = [0 \ 0 \ 1]$, 分别为结点 1, 2 和 3 的面积坐标。 $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$; b_2, b_3, c_2, c_3 可依次轮换下标得到。

而对应广义常应变的质量矩阵为

$$[m_c]^e = \rho h \iint [N_c]^T [N_c] \, dx dy \tag{6}$$

将(4)式代入(6)式, 并将 $[m_c]^e$ 写成分块形式

$$[m_c]^e = \begin{bmatrix} m_{c11} & m_{c12} & m_{c13} \\ m_{c21} & m_{c22} & m_{c23} \\ m_{c31} & m_{c32} & m_{c33} \end{bmatrix}$$

$$[m_{\bar{c}}] = \rho h [A_i^1]^T \iint [L_c]^T [L_c] \, dx dy [A_j^1] = 2 \triangle \rho h \left([A_i^1]^T [S_c] [A_j^1] \right)$$

对应广义变应变的质量矩阵为

$$[m_v]^e = \rho h \iint [N_v]^T [N_v] \, dx dy \tag{7}$$

其中

$$[m_{vj}] = 2 \triangle \rho h \left([A_i^2]^T [S_v] [A_j^2] \right)$$

在(6)和(7)式中

$$[S_c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & & & & & \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & & & & \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & & & \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{180} & & \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{360} & \frac{1}{180} & \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{360} & \frac{1}{360} & \frac{1}{180} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$
$$[S_v] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1680} & & & & & \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{1680} & & & & \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{1680} & & & \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

于是, TRUNC 元的一种质量矩阵为

$$[m]^e = [m_c]^e + [m_v]^e \tag{8}$$

TRUNC 元的另一种质量矩阵就是只取对应广义常应变的质量矩阵

$$[m]^e = [m_c]^e \tag{9}$$

2 算例

用有限元法求解薄板的固有振动问题, 最后归结为求解特征值方程:

$$[K] - \omega^2 [m] \{ \delta \} = 0 \tag{10}$$

本文采用子空间迭代法求解前几阶频率 (Hz)。表中 FEMT1、FEMT2 分别为采用 (8) 式和 (9) 式的质量矩阵的单元。

算例 1 用 TRUNC 元的有限元法求解四边固支定方板固有振动频率。

表 1 四边固支方板固有振动频率¹⁾

Tab 1 Natural vibration frequency of clamped square plate					
方法	网格	自由度	ω_1	ω_2	ω_3
FEMT1	12X12	363	35.8669	73.0788	73.0796
			(-0.34%)	(-1.19%)	(-1.19%)
FEMT2	12X12	363	35.8679	73.0815	73.0823
			(-0.34%)	(-1.19%)	(-1.19%)
精确解			35.988	73.96	73.96

1) 括号数字为相对误差; 乘子为 $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, L 表示方板边长

算例 2 用 TRUNC 元的有限元法求解四边简支方板固有振动频率。

表 2 四边简支方板固有振动频率¹⁾

Tab 2 Natural vibration frequency of square plate with simple supported					
方法	网格	自由度	ω_1	ω_2	ω_3
FEMT1	12X12	407	19.7743	49.2819	49.2851
			(0.18%)	(-0.13%)	(-0.13%)
FEMT2	12X12	407	19.7743	49.2836	49.2851
			(0.18%)	(-0.13%)	(-0.13%)
精确解			19.7392	49.348	49.348

1) 括号数字为相对误差; 乘子为 $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, L 表示方板边长

从计算结果可以看出, 两种质量矩阵的计算结果相差不大; 而只取对应常应变的质量矩阵, 计算精度已相当高。因此, 在实际计算时可以只取对应常应变的质量矩阵, 这样不仅减少了计算量, 而且足以满足工程设计的要求。还应当指出, 对于其他的三角形薄板单元, 也可以采用本文所建立的新两种新的质量矩阵分析薄板的动力问题。

(下转第 104 页)

- the South China Sea coast[J] . J Org Chem, 2001, 66: 6252—6256.
- [6] LIN Y C, SHAO Z Y, JIANG G C, et al. Penicillazine, a unique quinolone derivative with 4H-5, 6-dihydro-1, 2-oxazine ring system from the marine fungus *Penicillium* sp. (strain # 386) from the South China Sea[J] . Tetrahedron, 2000, 56: 9607—9609.
- [7] 陈月琴, 周世宁, 戴欣, 等. 海洋产灵菌红素细菌的基因分析与鉴定[J] . 中山大学学报(自然科学版), 1999, 38(1): 115—117.
- [8] WASSERMAN H H, McKEON J E, SMITH L A, et al. Studies on prodigiosin and the biopyrrole precursor[J] . Tetrahedron, 1966, 31(Suppl 8): 647—662.
- [9] BOGER D L, PATEL M. Total Synthesis of prodigiosin, prodigiosene and desmethoxyprodigiosin; Diels-Alder reactions of heterocyclic azadienes and development of an effective palladium(II)-promoted 2, 2'-biopyrrole coupling procedure[J] . J Org Chem, 1988, 53(7): 1405—1415.
- [10] BOGER D L, PATEL M. Total synthesis of prodigiosin[J] . Tetrahedron Letters, 1987, 28(22): 2499—2502.

The Red Pigments Isolated from *Pseudomonas* sp. from the South China Sea

LI Hou-jin¹, CAI Chuang-hua², ZHOU Yi-pin², LIN Yong-cheng¹

(1. School of Chemistry and Chemical Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. South China Sea Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510301, China)

Abstract: *Pseudomonas* sp., collected from Daya Bay of the South China Sea, can produce red pigments. The culture media was investigated for its growth and the production of red pigments. Prodigiosin A and a new compound dimethyl prodigiosin B were isolated as the main components of red pigments from the extract of mycelia. Prodigiosin have been reported to possess potent antimicrobial and cytotoxic properties.

Key words: marine bacteria; *Pseudomonas* sp.; prodigiosin; dimethyl prodigiosin

(上接第 96 页)

参考文献:

- [1] ARGYRIS J H, HAASE M, MIEJNEK H P. On an unconventional but natural formation of a stiffness matrix [J] . Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering 1980, 22: 1—22.
- [2] SHI Z C. Convergence of TRUNC plate element[J] . Comput Mech Eng, 1987, 62: 71—88.
- [3] 石钟慈, 林群. 有限元方法在中国 // 中国数学六十年 [M] . 长沙: 湖南大学出版社, 1996.
- [4] 葛爱民, 罗恩. 非常规三角形板元(TRUNC) 的新列式方法 // 土木工程计算机应用文集[C] . 北京: 中国铁道出版社, 1999: 312—316.

The New Mass Matrixes of Thin Plate of Element With Applications

GE Ai-min¹, LUO En²

(1. Design Institute of Architecture, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In order to apply the element to the analysis of dynamic problems of thin plate, the mass matrixes of TRUNC element are deduced with a new formulation method and are applied to analyze the dynamic problems of thin plate. The numerical results exhibit that two new mass matrixes have higher accuracy and computational efficiency.

Key words: TRUNC element; dynamic problem of thin plate; mass matrix