

一阶脉冲积分微分方程边值问题^{*}

白定勇¹, 马如云²

(1. 韶关学院数学系, 广东 韶关 512005;
2. 西北师范大学数学系, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 运用上下解方法讨论非线性边界条件下的一阶脉冲积分微分方程解的存在性, 并利用所得结果研究积分微分方程周期边值问题解的存在性, 所用的上下解方法与传统方法不同。并且, 给出一个相应的例子来说明传统的上下解方法在此失去了作用。

关键词: 上解; 下解; Caratheodory 条件; 脉冲方程; 紧算子

中图分类号: O175.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 01-0016-04

设 $J = [0, T], 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < t_{p+1} = T$ 。考虑在非线性边界条件下的一阶脉冲积分微分方程边值问题 (P):

$$u' = f(t, u, S_1 u, S_2 u)$$

$$\text{a.e. } t \in J, t \neq t_j, j = 0, 1, 2, \cdots, p+1 \quad (1)$$

$$u(t_j^+) = I_j(u(t_j)), j = 1, 2, \cdots, p \quad (2)$$

$$g(u(0), u(T)) = 0 \quad (3)$$

其中, $u(t_j^+)$ 表示 u 在 $t_j (j = 1, 2, \cdots, p)$ 的右极限。

$f: J \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 满足 Caratheodory 条件, S_1 是 Volterra 积分算子, S_2 是 Fredholm 积分算子,

$$(S_1 u)(t) = \int_0^t k(t, s) u(s) ds$$

$$(S_2 u)(t) = \int_0^T h(t, s) u(s) ds$$

这里, $k \in L^\infty(D_1), h \in L^\infty(D_2), D_1 = \{(t, s): 0 \leq s \leq t \leq T\}, D_2 = \{(t, s): 0 \leq s, t \leq T\}$ 。 $I_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} (j = 1, 2, \cdots, p)$ 连续, $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续。

在 f 不含 $S_1 u, S_2 u$ 且连续的情形下, 文 [1] 讨论了 (1) - (2) 的周期边值问题。设 α, β 是 (P) 的下、上解, 本文的目的是利用上、下解方法, 在 $\alpha \leq \beta$ 和 $\beta \leq \alpha$ 两种情况下, 讨论 (P) 解的存在性。推广了文 [1, 2] 相应结果。本文边界条件 (3) 是非线性的, 当然包括了周期边值条件, 初值条件和终值条件, 然后我们将利用所得结果讨论一阶积分微分方程周期边值问题 (TP):

$$u'(t) = f(t, u, S_1 u, S_2 u) \quad \text{a.e. } t \in J$$

$$u(0) = u(T)$$

解的存在性, 所用的上下解方法不同于以往文献 (如文 [3, 4]) 中所用的传统方法, 观点新颖, 最后, 给出相应的例子来说明传统的上下解方法在此失去作用。

$u: J \rightarrow \mathbf{R}$ 是 (P) 的解是指 $u \in W^{1,1}(t_j, t_{j+1}), u(t_j) = u(t_j^-), j = 1, 2, \cdots, p, u(0) = u(0^+)$, 并且 u 满足 (1) - (3)。这里 $u(t_j^-)$ 表示 u 在 t_j 的左极限 ($j = 1, 2, \cdots, p$)。

1 存在性结果

本节定义 (P) 的上下解并给出解的存在性结果。设

$$\Omega = \{u: J \rightarrow \mathbf{R}; u|_{(t_j, t_{j+1})} \in L^1_{(t_j, t_{j+1})},$$

$$j = 0, 1, \cdots, p\}$$

$$\Omega^1 = \{u: J \rightarrow \mathbf{R}; u|_{(t_j, t_{j+1})} \in W^{1,1}_{(t_j, t_{j+1})},$$

$$j = 0, 1, \cdots, p\}$$

则在范数

$$\|u\|_\Omega = \sum_{j=0}^p \|u\|_{L^1_{(t_j, t_{j+1})}},$$

$$\|u\|_{\Omega^1} = \sum_{j=0}^p \|u\|_{W^{1,1}_{(t_j, t_{j+1})}}$$

下, Ω 和 Ω^1 是 Banach 空间。

定义 1 称 $\alpha \in \Omega^1$ 是问题 (P) 的下解, 如果 $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), (S_1 \alpha)(t), (S_2 \alpha)(t)),$

$$\text{a.e. } t \in J, t \neq t_j, j = 0, 1, \cdots, p+1$$

$$\alpha(t_j^+) \leq I_j(\alpha(t_j)), j = 1, 2, \cdots, p$$

* 收稿日期: 2002-04-22

基金项目: 教育部高等学校骨干教师计划资助项目 (GG-110-10736-1003); 师范大学知识与科技创新工程项目 (NWNKJXGC-212)

作者简介: 白定勇 (1972 年生), 男, 讲师, E-mail: baidingyong@163.net

$$g(\alpha(0), \alpha(T)) \leq 0.$$

上解 β 的定义只需将上面的诸不等式反向。

定理 1 设 α, β 为 (P) 的下、上解, $\alpha \leq \beta$ 。

若 $I_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} (j=1, 2, \dots, p)$ 非降,

$g(x, y)$ 在 $(x, y) \in [\alpha(0), \beta(0)] \times [\alpha(T), \beta(T)]$ 连续, 且对 $y \in [\alpha(T), \beta(T)]$, g 非增。则问题 (P) 至少存在一个解

$$u \in [\alpha, \beta] :=$$

$$\{u: J \rightarrow \mathbf{R} \mid \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in J\}$$

定理 1 的证明 为了讨论的方便, 取 $p=1$,

考虑 (P) 的修正问题 (Q):

$$u' = f(t, \gamma(t, u(t)), S_1 \gamma, S_2 \gamma) - u(t) + \gamma(t, u(t)), \text{ a.e. } t \in J, t \neq t_1 \quad (4)$$

$$u(t_1^+) = I_1(\gamma(t_1, u(t_1))) + u(t_1) - \gamma(t_1, u(t_1)) \quad (5)$$

$$u(0) = \gamma(0, u(0) - g(\gamma(0, u(0)), \gamma(T, u(T)))) \quad (6)$$

其中, $\gamma: J \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \gamma(t, u) = \max\{\alpha(t), \min\{u, \beta(t)\}\}$ 。定理的证明将由下面 3 个引理来完成。

引理 1 若 $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), t \in J$, 则 u 是 (P) 的解当且仅当 u 是 (Q) 的解。

引理 2 (Q) 的任一解 u 满足

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), t \in J$$

证明 设 u 是 (Q) 的一个解。

(1) 由 γ 的定义直接可以得到 $\alpha(0) \leq u(0) \leq \beta(0)$ 。

(2) $\alpha(t_1) \leq u(t_1) \leq \beta(t_1)$ 。事实上, 反设 $u(t_1) < \alpha(t_1)$, 则存在 $\theta \in [0, t_1], u(\theta) = \alpha(\theta)$, 使得 $u(t) < \alpha(t), t \in (\theta, t_1]$ 。这样, 有

$$(u - \alpha)'(t) + (u - \alpha)(t) \geq 0, \text{ a.e. } t \in [\theta, t_1]$$

从而在 $[\theta, t_1]$ 上, 有 $u \geq \alpha$ (详见文[5]), 矛盾。同样可证 $u(t_1) \leq \beta(t_1)$ 。

(3) $\alpha(t_1^+) \leq u(t_1^+) \leq \beta(t_1^+)$ 。事实上, 由 I_1 的非降性, 有

$$\alpha(t_1^+) \leq I_1(\alpha(t_1)) \leq$$

$$I_1(u(t_1)) = u(t_1^+) \leq I_1(\beta(t_1)) \leq \beta(t_1^+)$$

(4) $\alpha(T) \leq u(T) \leq \beta(T)$ 。事实上, 反设 $u(T) < \alpha(T)$, 则存在

$$\theta \in (t_1, T), u(\theta) = \alpha(\theta),$$

使得 $u(t) < \alpha(t), t \in (\theta, T]$ 。这样, 有

$$(u - \alpha)'(t) + (u - \alpha)(t) \geq 0, \text{ a.e. } t \in [\theta, T]$$

从而在 $[\theta, T]$ 上, 有 $u \geq \alpha$ (详见文[5]), 矛盾。同样可证 $u(T) \leq \beta(T)$ 。

(5) $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), t \in (0, t_1) \cup (t_1, T)$ 。事实上, 反设存在 $\theta \in (0, t_1)$, 使 $\alpha(\theta) > u(\theta)$ 。

则存在区间 $(c, d) \subset (0, t_1), (u - \alpha)(c) = (u - \alpha)(d) = 0$, 使得在区间 (c, d) 上, $u < \alpha$ 。这样, $(u - \alpha)'(t) + (u - \alpha)(t) \geq 0, \text{ a.e. } t \in [c, d]$ 从而在 $[c, d]$ 上, 有 $u \geq \alpha$ (参见文[5]), 矛盾。同样可证

$$\alpha(t) \leq u(t), t \in (t_1, T),$$

$$u(t) \leq \beta(t), t \in (0, t_1) \cup (t_1, T)$$

引理 3 问题 (Q) 至少存在一个解

证明 考虑问题族 (Q_λ) :

$$u'(t) + u(t) = \lambda[f(t, \gamma(t, u(t)), S_1 \gamma, S_2 \gamma) + \gamma(t, u(t))] \text{ a.e. } t \in J, t \neq t_1 \quad (7)$$

$$u(t_1^+) - u(t_1) = \lambda[I_1(\gamma(t_1, u(t_1))) - \gamma(t_1, u(t_1))] \quad (8)$$

$$u(0) = \lambda[\gamma(0, u(0) - g(\gamma(0, u(0)), \gamma(T, u(T))))] = 0 \quad (9)$$

其中, $\lambda \in [0, 1]$, 设 $J_1 = [0, t_1], J_2 = [t_1, T], E = L^1(J_1) \times L^1(J_2), E^1 = W^{1,1}(J_1) \times W^{1,1}(J_2)$ 。定义算子 $L: E^1 \rightarrow E \times \mathbf{R}^2, N: E \rightarrow E \times \mathbf{R}^2$ 分别为

$$L(u, v) = (u'(\cdot) + u(\cdot), v'(\cdot) + v(\cdot),$$

$$v(t_1) - u(t_1), u(0))$$

$$N(u, v) = (fu, fv, I_1(\gamma(t_1, u(t_1))) -$$

$$\gamma(t_1, u(t_1)), \gamma(0, u(0) -$$

$$g(\gamma(0, u(0)), \gamma(T, u(T))))$$

其中,

$$fu = f(\cdot, \gamma(\cdot, u(\cdot)), S_1 \gamma(\cdot, u(\cdot)),$$

$$S_2 \gamma(\cdot, u(\cdot))) + \gamma(\cdot, u(\cdot)),$$

$$fv = f(\cdot, \gamma(\cdot, v(\cdot)), S_1 \gamma(\cdot, v(\cdot)),$$

$$S_2 \gamma(\cdot, v(\cdot))) + \gamma(\cdot, v(\cdot))$$

则 (Q_λ) 等价于抽象方程 $L(u, v) = \lambda Ni(u, v), (u, v) \in E^1, \lambda \in [0, 1]$ 。

其中, $i: E^1 \rightarrow E$ 紧嵌入算子。易证 L 是连续的, 一对且到上的。事实上, 方程

$$u'(t) + u(t) = \sigma^1(t), \text{ a.e. } t \in J_1$$

其中, $\sigma_1 \in L^1(J_1)$, 在初值条件 $u(0) = B (B \in \mathbf{R})$ 下有惟一解

$$u \in W^{1,1}(J_1),$$

$$u(t) = \exp(-t) \cdot \left\{ B + \int_0^t \exp(s) \sigma_1(s) ds \right\}$$

从而方程

$$v'(t) + v(t) = \sigma_2(t),$$

$$\text{a.e. } t \in J_2, \sigma_2 \in L^1(J_2)$$

在条件 $v(t_1) = A - u(t_1) (A \in \mathbf{R})$ 下有惟一解

$$v(t) = \exp(-t) \cdot \left\{ A - u(t_1) + \int_0^t \exp(s) \sigma_2(s) ds \right\}$$

其中, $u(t_1) = \exp(-t_1) \cdot \{B + \int_0^{t_1} \exp(s) \sigma_1(s) ds\}$.

由开映象定理, L 存在连续的逆算子 L^{-1} , 这样, (Q_λ) 又等价于不动点方程

$$(u, v) = \lambda L^{-1} Ni(u, v) := \lambda H(u, v),$$
$$\lambda \in [0, 1], (u, v) \in E^1 \tag{10}$$

因 N 是连续的, 故 $H: E^1 \rightarrow E^1$ 是紧算子. 下面只需验证方程 (10) 的所有可能解在 E^1 中不依赖于 λ 的先验界就够了. 事实上, 若对某个 $\lambda \in [0, 1]$, u_λ 是方程 (10) 所对应的解. 因

$$\alpha \leq \gamma(t, u(t)) \leq \beta(t), \forall t \in J$$

故存在常数 $C_1 > 0$, 使

$$|\gamma(t, u(t))| \leq C_1, \forall t \in J$$

另外 f 满足 Caratheodory 条件, S_1, S_2 是有界线性算子, 因此存在 $\delta \in L^1(J)$, 使

$$|f(t, \gamma, S_1 \gamma, S_2 \gamma)| \leq \delta(t), \text{ a.e. } t \in J$$

这样,

$$\|u' + u\|_{W^{1,1}(J_1)} \leq \|\delta\|_{L^1(J_1)} + t_1 C_1,$$

$$\|v' + v\|_{W^{1,1}(J_2)} \leq \|\delta\|_{L^1(J_2)} + (T - t_1) C_1$$

从而存在常数 $C_2 > 0, C_3 > 0$, 使

$$\|u\|_{W^{1,1}(J_1)} \leq C_2$$

$$\|v\|_{W^{1,1}(J_2)} \leq C_3$$

所以

$$\|u\|_{W^{1,1}(J_1)} + \|v\|_{W^{1,1}(J_2)} \leq C_2 + C_3 := C$$

C 是与 λ 无关的常数. 由 Schaefer 原理^[6], (Q_λ) 至少存在一个解 $u \in W^{1,1}(J)$.

定理 2 设 α, β 是问题 (P) 的下、上解, $\beta \leq \alpha$. 若 $I_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} (j = 1, 2, \dots, p)$ 非降, $g(x, y)$ 在 $(x, y) \in [\beta(0), \alpha(0)] \times [\beta(T), \alpha(T)]$ 连续, 且对 $x \in [\beta(0), \alpha(0)], g$ 非降. 则问题 (P) 至少存在一个解

$$u \in [\beta, \alpha] :=$$

$$\{u: J \rightarrow \mathbf{R} | \beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \forall t \in J\}$$

证明 类似于定理 1 的证明, 这里省略.

2 结果的应用

下面利用所得结果讨论积分微分方程周期边值问题 (TP) 解的存在性. 设 $A = \{t_k\}_{k=0}^{p+1}$ 是 J 的一个点集:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$$

令

$$\Omega_A = \{u: J \rightarrow \mathbf{R}; u|_{(t_k, t_{k+1})} \in W^{1,1}_{(t_k, t_{k+1})},$$
$$k = 0, 1, \dots, p,$$

$$u(0^+) = u(0), u(t_k^-) = u(t_k),$$
$$k = 1, 2, \dots, p+1\}$$

Ω_A 在范数 $\|u\|_{\Omega_A} = \sum_{k=0}^p \|u\|_{W^{1,1}(t_k, t_{k+1})}$ 下是 Banach 空间.

定义 2 函数 $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}$ 是 (TP) 的下解是指存在 J 的一个点集 $A = \{t_k\}_{k=0}^{p+1}$ 使得 $\alpha \in \Omega_A$, 且满足

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), (S_1 \alpha)(t), (S_2 \alpha)(t)),$$

$$\text{a.e. } t \in J, t \neq t_k, k = 0, 1, \dots, p+1$$

$$\alpha(t_k^+) \leq \alpha(t_k), k = 1, 2, \dots, p, \alpha(0) \leq (T)$$

上解 β 的定义只需将上面的诸不等式反向.

设 α, β 是 (TP) 的下、上解, $\alpha \in \Omega_{A_1}, \beta \in \Omega_{A_2}$.

取 $A = A_1 \cup A_2$, 则 $\alpha, \beta \in \Omega_A$. 即下解 α 和上解 β 有一个共同的点集 $A \subset J$, 使 $\alpha, \beta \in \Omega_A$.

讨论下面的脉冲方程周期边值问题 (IP):

$$u'(t) = f(t, u(t), S_1 u, S_2 u)$$

$$\text{a.e. } t \in J, t \neq t_j, j = 0, 1, 2, \dots, p+1$$

$$u(t_j^+) = u(t_j) + \varphi_j(u(t_j)), j = 1, 2, \dots, p$$

$$u(0) = u(T)$$

其中, $\varphi_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, p$. 显然, 若 $\varphi_j(u) = 0, \forall u \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, p$, 则 (IP) 等价于 (TP). 令

$$I_j(u) = u + \varphi_j(u), u \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, p$$

显然 $I_j (j = 1, 2, \dots, p)$ 是非降函数. 根据定理 1, 若 α, β 是问题 (TP) 按定义 2 给出的下、上解, 且 $\alpha \leq \beta$, 则问题 (TP) 至少存在一个解 $u \in [\alpha, \beta]$. 显然, u 是绝对连续的, 即有下面的结论.

定理 3 若 $\alpha, \beta \in \Omega_A$ 是问题 (TP) 按定义 2 给出的下、上解, 且 $\alpha \leq \beta$, 则问题 (TP) 至少存在一个解 $u \in [\alpha, \beta]$.

由定理 2, 同样有下面结果.

定理 4 若 $\alpha, \beta \in \Omega_A$ 是问题 (TP) 按定义 2 给出的下、上解, 且 $\beta \leq \alpha$, 则问题 (TP) 至少存在一个解 $u \in [\beta, \alpha]$.

注 在传统的上下解方法中, 要找到上解和下解并不容易, 通常限制我们寻找常数或线性函数作为上解或下解. 定义 2 则突破了这一点, 为找出上解和下解提供了更广泛的信息.

例 在周期边值 $u(0) = u(2\pi)$ 条件下讨论方程

$$u'(t) = -(u(t))^2 - 7\pi u(t) + \cos t - \sin t +$$
$$\int_0^t \sin(t-s) u(s) ds + \int_0^{2\pi} \cos(t-s) u(s) ds,$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

解的存在性.

设

$$\begin{aligned} f(t, u, S_1 u, S_2 u) &:= F(t, u) = \\ &-(u(t))^2 - 7\pi u(t) + \cos t - \sin t + \\ &\int_0^t \sin(t-s) u(s) \, ds + \int_0^{2\pi} \cos(t-s) u(s) \, ds, \\ &t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

容易验证, $\beta(t) = \frac{\pi}{4}, t \in [0, 2\pi]$ 是它的传统常数上解. 可以验证不存在非负常数 k , 使得 $\alpha(t) = k, t \in [0, 2\pi]$, 是它的下解. 事实上如果 $\alpha(t) = k$ 是下解, 则 $F(t, k) \geq 0, t \in [0, 2\pi]$. 但是, $F(\pi/4, k) = -k^2 - (7\pi - 1)k - k\sqrt{2}/2 < 0$. 这说明无法利用传统的方法得到常数下解. 若令

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ t - 2\pi, & \frac{\pi}{4} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

易验证它为下解, 因此由定理 3, 该边值问题至少

存在一个解 $u \in [\alpha, \beta]$, 且在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上, $u \geq 0$.

参考文献:

[1] BAINOV D D, HRISTOVA S G, HU S, et al. Period boundary value problem for systems of first order impulsive differential equations[J]. Diff Integral Eqs, 1989, 2: 37—43.

[2] PIERSON G C. Impulsive differential equations of first order with periodic boundary conditions[J]. Diff Eqs Dyn Sys, 1993, 1: 185—196.

[3] 张福保. 一阶混合型积分微分方程的周期边值问题[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(3): 323—330.

[4] 庄万, 陈玉波. 带 Caratheodory 函数的积分微分方程周期边值问题[J]. 数学学报, 1999, 42(4): 637—645.

[5] CABADA A. The monotone method for first order problems with linear and nonlinear boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 1994, 63: 163—186.

[6] SMART D R. Fixed points theorems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Boundary Value Problem for First Order Impulsive
Integral-Differential Equations

Bai Ding yong¹, Ma Ru-yun²

(1. Department of Mathematics, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China;
2. Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The paper is concerned with the existence of solutions to first order impulsive integral differential equations with nonlinear boundary value conditions, which follows the existence of solutions to period boundary value problem of first order integral differential equations as an application using the method of upper and lower solutions which differs from the classical one. Moreover an example shows that the classical method does not work.

Key words: upper solution; lower solution; Caratheodory condition; impulsive equation; compact operator

(上接第 15 页)

Equivalence Conditions for Some K-Convexities

XIAN Jun, LI Yong jin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The equivalence conditions for some K-convexities are explored, and obtain some conditions on which some K-convexities are equivalent to each other are obtained. For example, there are seven K-convexities equivalent to each other if Banach space X is reflexive and X, X^* both possess (H) property respectively. If X is a reflexive space and has (H) property, then there are six K-convexities equivalent to each other.

Key words: K-very convex; K-strongly convex; weak local mid-point K-uniformly convex; K-extremely convex; K-strictly convex