

若干 K 凸性的等价条件^{*}

冼 军, 黎永锦
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 就一些 K 凸性的等价条件作出了讨论, 证明了几种 K 凸性在某种条件下是等价的, 如当空间 X 是自反的且 X 和 X^* 均有 (H) 性质时, 则有 7 种 K 凸性等价, 当空间 X 自反且有 (H) 性质, 则有 6 种 K 凸性等价。

关键词: K-很凸; K-极凸; 弱中点局部 K-一致凸; 局部 K-一致凸; K-强凸; K-严格凸

中图分类号: O177.2 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2003) 01-0012-05

1 引言和定义

随着 Banach 空间 K 凸性理论研究的发展, 许多 K 凸性得到了深入的研究, 各种 K 凸性都有其自身独特的性质, 在一般 Banach 空间中, 各种 K 凸性是不等价的, 它们在什么条件下等价呢? 本文就这个问题作研究, 并得到一些结果。

本文所涉及的空间 X 为实 Banach 空间, X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间, 采用以下符号:

$$S(X) = \{x: x \in X, \|x\| = 1\}, \quad S(X^*) = \{x^*: x^* \in X^*, \|x^*\| = 1\}, \quad d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|,$$

$$S_x = \{f: f \in S(X^*), f(x) = 1 = \|x\|\}, \quad A_f = \{x: x \in S(X), f(x) = 1 = \|f\|\}$$

对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_{K+1} \in S(X)$, 记

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{K+1}) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{vmatrix} \mid f_1, f_2, f_3, \dots, f_K \in S(X^*) \right\}$$

定义 1^[1] 若对任意 $x_1, x_2, \dots, x_{K+1} \in X$, 当 $\|\sum_{i=1}^{K+1} x_i\| = \sum_{i=1}^{K+1} \|x_i\|$ 时, $x_1, x_2, \dots, x_{K+1}$ 线性相关, 则称 X 为 K-严格凸空间。

定义 2^[2] X 为 K-严格凸空间且对 $\forall x \in S(X)$ 当 $\{x_n\} \subset S(X)$ 及某个 $f \in S_x, f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, $\{x_n\}$ 为相对紧集, 则称 X 为 K-强凸空间。

定义 3^[2] 对 $\forall x \in S(X), \{x_n^{(i)}\} \subset S(X), i = 1, 2, \dots, K$
当 $\|x + x_n^{(1)} + \dots + x_n^{(K)}\| \rightarrow K + 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 有 $A(x, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(K)}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则称 X 为局部 K-一致凸空间。

定义 4^[2] $\forall \epsilon > 0, x \in S(X), \exists \delta \equiv \delta(x, \epsilon)$
使得当 $x_1, \dots, x_{K+1} \in S(X), \|x - \frac{x_1 + \dots + x_{K+1}}{K+1}\| < \delta$ 时, 有 $A(x_1, \dots, x_{K+1}) < \epsilon$, 则称 X 为中点局部 K-一致凸空间。

定义 5^[3] $\forall f \in S(X^*), \{x_n^{(i)}\} \subset S(X) (i = 1, 2, \dots, K+1)$
当 $f(x_n^{(i)}) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) (i = 1, 2, \dots, K+1)$ 时,
 $A(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(K+1)}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

则称 X 为 K-极凸空间。

定义 6 X 为 K-严格凸空间且对 $\forall x \in S(X), \{x_n\} \subset S(X)$ 及某个 $f \in S_x, f(x_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, $\{x_n\}$

* 收稿日期: 2002-06-25

作者简介: 冼军 (1976 年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 黎永锦, E-mail: stslxyj@zsu.edu.cn

为相对弱紧集, 则称 X 为 K -很凸空间。

定义 7 $\forall \epsilon > 0, x \in S(X), f_1, f_2, \dots, f_K \in S(X^*), \exists \delta \equiv \delta(\epsilon, x, f_1, \dots, f_K)$
使当 $x_i \in S(X) (i = 1, 2, \dots, K+1), \|x - \frac{x_1 + \dots + x_{K+1}}{K+1}\| < \delta$ 时, 有

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{matrix} \right\| < \epsilon$$

则称 X 为弱中点局部 K -一致凸空间 (这里 $\|\cdot\|$ 表示行列式的绝对值)。

其它概念和符号可见文 [4] 或 [5], 对 K -很凸空间和弱中点局部 K -一致凸空间, 它们是已有的很凸空间和弱中点局部一致凸空间的自然推广, 对它们的研究已在另文中给出。

2 主要结论和证明

- 定理 1 X 为 K -强凸空间的充要条件为 X 是 K -很凸且有 (H) 性质。
推论 1 若 X 具有 (H) 性, 则 K -强凸空间与 K -很凸空间等价。
定理 2 X 为自反的 K -严格凸空间, 则 X 为 K -很凸空间。
定理 3 X 为弱中点局部 K -一致凸空间, 则 X 为 K -严格凸空间。
定理 4 X 为 K -很凸空间, 则 X 为弱中点局部 K -一致凸空间。
证明 由于 X 为 K -很凸空间, 因此对任意

$\epsilon > 0, x \in S(X), f \in S_x, f_1, f_2, f_3 \dots, f_K \in S(X^*)$
存在 $\delta \equiv \delta(f, x, \epsilon, f_1, f_2, f_3, \dots, f_K) > 0$
使得 $x_1, x_2, \dots, x_K \in S(X)$, 且
 $f(x + x_1 + \dots + x_K) > (K+1) - K(K+1)\delta$
时, 有

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{matrix} \right\| < (K+1)^{-1}\epsilon \tag{1}$$

设 $x_1, x_2, \dots, x_{K+1}$ 满足 $\|x - (K+1)^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1})\| < \delta$
则 $1 - (K+1)^{-1}f(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1}) = f(x - (K+1)^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1}))$
 $\leq \|x - (K+1)^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1})\| < \delta$
故 $f(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1}) > (K+1) - (K+1)\delta$
从而 $K + f(x_i) \geq f(x_1 + x_2 + \dots + x_{K+1}) > (K+1) - (K+1)\delta$
即 $f(x_i) \geq 1 - (K+1)\delta \quad (i = 1, 2, \dots, K+1)$
因此

$f(x + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + \dots + x_{K+1}) > 1 + K[1 - (K+1)\delta] = K + 1 - K(K+1)\delta$
由(1) 知对每个 $i(1 \leq i \leq K+1)$, 有

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{i-1}) & f_1(x_{i+1}) & f_1(x_{i+2}) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_{i-1}) & f_K(x_{i+1}) & f_K(x_{i+2}) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{matrix} \right\| \leq (K+1)^{-1}\epsilon \tag{2}$$

令 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{vmatrix}$

不妨设 $D \neq 0$, 否则证明显然成立。

$$D_i = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{i-1}) & f_1(x) & f_1(x_{i+1}) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{i-1}) & f_k(x) & f_k(x_{i+1}) & \cdots & f_k(x_{K+1}) \end{matrix} \right\|, \quad i = 1, 2, \cdots, K+1$$

由常规计算和 (2) 式可知 $|D| = \left| \sum_{i=1}^{K+1} D_i \right| \leq \sum_{i=1}^{K+1} D_i < \epsilon$, 即

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{K+1}) \end{matrix} \right\| < \epsilon$$

所以由定义知 X 为弱中点局部 K -一致凸空间。

推论 2 若 Banach 空间 X 是自反的, 则下列性质等价: ① K -严格凸空间; ② K -很凸空间; ③ 弱中点局部 K -一致凸空间。

定理 5 设 X 是自反的 Banach 空间, 且有 (H) 性质, 则以下命题等价: ① X 是 K -强凸空间; ② X 是 K -很凸空间; ③ X 是 K -极凸空间; ④ X 是 K -严格凸空间; ⑤ X 是中点局部 K -一致凸空间; ⑥ X 是弱中点局部 K -一致凸空间。

定理 6 设 X 是自反的 Banach 空间, 且 X 和 X^* 均有 (H) 性质, 则以下命题等价: ① X 是 K -强凸空间; ② X 是 K -很凸空间; ③ X 是 K -极凸空间; ④ X 是 K -严格凸空间; ⑤ X 是中点局部 K -一致凸空间; ⑥ X 是弱中点局部 K -一致凸空间; ⑦ X 是局部 K -一致凸空间。

由以下定理 7 和各 K 凸性关系可知以上定理 6 成立。

定理 7 X 是自反的 Banach 空间, 且 X^* 有 (H) 性质, 则 X 是局部 K -一致凸空间的充要条件为 X 具有 (H) 性质且是 K -严格凸空间。

证明 (1) 必要性。由文[3]中论述知局部 K -一致凸空间必为 K -强凸空间, 而 K -强凸空间有 (H) 性质且必为 K -严格凸空间。

(2) 充分性。用反证法, 若不然, 存在 $x \in S(X)$ 和 $S(X)$ 中的 K 个序列 $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \cdots, \{x_K^n\}$, 使

$$\|x + x_1^n + \cdots + x_K^n\| \rightarrow K + 1, \quad n \rightarrow \infty$$

但 $A(x, x_1^n + \cdots + x_K^n)$ 不收敛于 $0 (n \rightarrow \infty)$, 因此存在 $\epsilon > 0$ 及 $\{n\}$ 的子列, 不妨仍记为是 $\{n\}$, 则对一切 n 有

$$A(x, x_1^n, \cdots, x_K^n) \geq \epsilon \tag{3}$$

由假设和 Hahn-Banach 定理可知, 存在 $f^n \in S(X^*)$, 使得

$$f^n(x + x_1^n + \cdots + x_K^n) = \|x + x_1^n + \cdots + x_K^n\|.$$

由

$$|f^n(x)| \leq 1, |f^n(x_1^n)| \leq 1, \cdots, |f^n(x_K^n)| \leq 1,$$

及

$$f^n(x + x_1^n + \cdots + x_K^n) = \|x + x_1^n + \cdots + x_K^n\| \rightarrow K + 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

可知

$$f^n(x) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), f^n(x_1^n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \cdots, f^n(x_K^n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty).$$

由于 X 是自反的, 所以 X^* 也是自反的, 所以 $U(X^*)$ 是弱自列紧集, 故存在 $\{f^j\} \subset \{f^n\}$ 和 $f \in U(X^*)$ 使 $f^j \xrightarrow{w} f$, 再由 $f^n(x) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 可知 $f(x) = 1$, 因此 $\|f\| = 1$, 又 X^* 具有 (H) 性质, 故 $f^j \rightarrow f$, 又

$$|f(x_{i^j}^n) - 1| = |(f - f^j + f^j)(x_{i^j}^n) - 1| = |(f - f^j)(x_{i^j}^n) + f^j(x_{i^j}^n) - 1| \leq$$

$$\|f - f^j\| \cdot \|x_{i^j}^n\| + |f^j(x_{i^j}^n) - 1| \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty), (i = 1, 2, \cdots, K)$$

所以

$$f(x_{i^j}^n) \rightarrow 1 (j \rightarrow \infty), i = 1, 2, \cdots, K.$$

因为 X 是自反的, 所以 $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \cdots, \{x_K^n\}$, 都有弱收敛子列, 并且 $x_i \in U(X)$, 不妨记为

$$x_i^m \xrightarrow{w} x_i (m \rightarrow \infty), i = 1, 2, \cdots, K$$

又

$$f(x_{i^j}^n) \rightarrow 1 (j \rightarrow \infty), i = 1, 2, \cdots, K$$

所以

$$f(x_i) = 1, i = 1, 2, \cdots, K$$

又 $x_i \in U(X)$, 易知 $\|x_i\| = 1$, 再由 X 具有 (H) 性质可知

$$x_i^m \rightarrow x_i (m \rightarrow \infty) (i = 1, 2, \cdots, K)$$

所以
$$x + x_1^m + x_2^m + \cdots + x_K^m \rightarrow x + x_1 + x_2 + \cdots + x_K \quad (m \rightarrow \infty)$$

易知
$$\|x + x_1^m + x_2^m + \cdots + x_K^m\| \rightarrow \|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_K\| \quad (m \rightarrow \infty)$$

又因为
$$\|x + x_1^n + x_2^n + \cdots + x_K^n\| \rightarrow K + 1,$$

所以
$$\|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_K\| = K + 1$$

即
$$\|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_K\| = \|x\| + \sum_{i=1}^K \|x_i\| = K + 1.$$

由式 (1) 和 $A(x, x_1, x_2, \cdots, x_K)$ 的连续性, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(x, x_1^m, x_2^m, \cdots, x_K^m) = A(x, x_1, x_2, \cdots, x_K) \geq \epsilon > 0 \tag{4}$$

由 X 的 K -严格凸性知 $x, x_1, x_2, \cdots, x_K$ 线性相关, 即存在不全为 0 的 $a_0, a_1, \cdots, a_K$, 使得

$$a_0 x + a_1 x_1 + \cdots + a_K x_K = 0 \tag{5}$$

不妨设 $a_0 \neq 0$, 下证 x 必属于 $x_1, \cdots, x_K$ 生成的仿射子空间 $[x_1, \cdots, x_K]$, 从而 x 与 $[x_1, \cdots, x_K]$ 的距离 $d(x, [x_1, \cdots, x_K]) = 0$.

事实上, 由于 $\left\| \frac{x + x_1 + \cdots + x_K}{K + 1} \right\| = 1$, 因此由 Hahn-Banach 定理可知存在 $f \in S(X^*)$

使得 $f\left(\frac{x + x_1 + \cdots + x_K}{K + 1}\right) = 1$, 即

$$f(x) + f(x_1) + \cdots + f(x_K) = K + 1$$

又因为 $|f(x_i)| \leq \|x_i\| = 1, (i = 1, 2, \cdots, K), \quad |f(x)| \leq \|x\| = 1$

所以
$$f(x) = f(x_1) = \cdots = f(x_K) = 1$$

由 (5) 式可得
$$a_0 + a_1 + \cdots + a_K = f(a_0 x + a_1 x_1 + \cdots + a_K x_K) = 0$$

因此
$$x = \frac{-a_1}{a_0} x_1 + \cdots + \frac{-a_K}{a_0} x_K, \quad \frac{-a_1}{a_0} + \cdots + \frac{-a_K}{a_0} = 1,$$

从而 $x \in [x_1, \cdots, x_K]$.

在文 [6, 7] 中, Bernal, Geremia 和 Sullivan 已经证明

$$\prod_{i=1}^K d_i \leq A(x, x_1, \cdots, x_K) \leq K^{1/2} \prod_{i=1}^K d_i$$

其中, $d_1 = d(x, [x_1, \cdots, x_K]), d_2 = d(x_1, [x_2, \cdots, x_K]), \cdots, d_K = \|x_{K-1} - x_K\|$.

前面已证 $d_1 = d(x, [x_1, \cdots, x_K]) = 0$, 所以 $A(x, x_1, \cdots, x_K) = 0$, 但这与 (4) 式矛盾, 因此 X 是局部 K -一致凸的.

致谢：感谢林伟教授对本文的有益建议.

参考文献：

[1] SINGER I. On the set of best approximation of an element in a normed linear space[J] . Rev Roum Math Pure Appl, 1960, 5: 1629—1650.

[2] 苏雅拉图, 吴从焱. K -强凸性与 K -强光滑性[J] . 数学年刊, 1998, 19(A) 3: 373—378.

[3] 何仁义. K -强凸与局部 K -一致光滑空间[J] . 数学杂志, 1997, 17(2): 251—256.

[4] 何仁义. 关于 K -极凸 Banach 空间[J] . 纯粹数学与应用数学, 1998, 14(2): 19—22.

[5] 南朝勋, 王建华. K -严格凸性与 K -光滑性[J] . 数学年刊, 1990, A11(3): 321—324.

[6] BERNAL J, SULLIVAN F. Superreflexivity and normal structure in Banach spaces[J] . Illinois J Math, 1983(27): 501—513.

[7] GEREMIA R, SULLIVAN F. Multi-dimensional volumes and modul of convexity in Banach spaces[J] . Ann Math Pure Appl, 1981 (127): 231—251.

(下转第 19 页)

设

$$\begin{aligned} f(t, u, S_1 u, S_2 u) &:= F(t, u) = \\ &-(u(t))^2 - 7\pi u(t) + \cos t - \sin t + \\ &\int_0^t \sin(t-s) u(s) ds + \int_0^{2\pi} \cos(t-s) u(s) ds, \\ &t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

容易验证, $\beta(t) = \frac{\pi}{4}, t \in [0, 2\pi]$ 是它的传统常数上解. 可以验证不存在非负常数 k , 使得 $\alpha(t) = k, t \in [0, 2\pi]$, 是它的下解. 事实上如果 $\alpha(t) = k$ 是下解, 则 $F(t, k) \geq 0, t \in [0, 2\pi]$. 但是, $F(\frac{\pi}{4}, k) = -k^2 - (7\pi - 1)k - k\sqrt{2}/2 < 0$. 这说明无法利用传统的方法得到常数下解. 若令

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ t - 2\pi, & \frac{\pi}{4} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

易验证它为下解, 因此由定理 3, 该边值问题至少

存在一个解 $u \in [\alpha, \beta]$, 且在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上, $u \geq 0$.

参考文献:

[1] BAINOV D D, HRISTOVA S G, HU S, et al. Period boundary value problem for systems of first order impulsive differential equations[J]. Diff Integral Eqs, 1989, 2: 37—43.

[2] PIERSON G C. Impulsive differential equations of first order with periodic boundary conditions[J]. Diff Eqs Dyn Sys, 1993, 1: 185—196.

[3] 张福保. 一阶混合型积分微分方程的周期边值问题[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(3): 323—330.

[4] 庄万, 陈玉波. 带 Caratheodory 函数的积分微分方程周期边值问题[J]. 数学学报, 1999, 42(4): 637—645.

[5] CABADA A. The monotone method for first order problems with linear and nonlinear boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 1994, 63: 163—186.

[6] SMART D R. Fixed points theorems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Boundary Value Problem for First Order Impulsive
Integral-Differential Equations

Bai Dingyong¹, Ma Ru-yun²
(1. Department of Mathematics, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China;
2. Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The paper is concerned with the existence of solutions to first order impulsive integral differential equations with nonlinear boundary value conditions, which follows the existence of solutions to period boundary value problem of first order integral differential equations as an application using the method of upper and lower solutions which differs from the classical one. Moreover an example shows that the classical method does not work.

Key words: upper solution; lower solution; Caratheodory condition; impulsive equation; compact operator

(上接第 15 页)

Equivalence Conditions for Some K-Convexities

XIAN Jun, LI Yong-jin
(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The equivalence conditions for some K-convexities are explored, and obtain some conditions on which some K-convexities are equivalent to each other are obtained. For example, there are seven K-convexities equivalent to each other if Banach space X is reflexive and X, X^* both possess (H) property respectively. If X is a reflexive space and has (H) property, then there are six K-convexities equivalent to each other.

Key words: K-very convex; K-strongly convex; weak local mid-point K-uniformly convex; K-extremely convex; K-strictly convex