

极小子流形的一个刚性定理^{*}

王 琪

(浙江大学西溪校区数学系, 浙江杭州 310028)

摘 要: 首先得到一个推广 Simons 型积分不等式, 然后用它给出共形平坦黎曼流形中紧致极小子流形的一个拥挤定理, 推广了 Li 的已有结果.

关键词: 共形平坦; 紧致极小子流形; Ricci 曲率; 拥挤

中图分类号: O186 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) S2-0168-03

1 引 言

Li^[1] 证明了

定理 A 设 M^n 是单位球面 S^{n+p} (1) ($p \geq 2$) 中紧致极小子流形, 如果 M^n 的第二基本形式的模长平方 S 满足 $S \leq \frac{2}{3}n$ 在 M^n 上处处成立, 则 M^n 或为全测地的, 或为 S^4 中 Veronese 曲面.

本文定义一组常数

$$D(n, p) = \frac{2n}{n+p-2}$$

$$E(n, p) = \frac{pn(n-1)(2n-1)}{2(n+p-2)^2}$$

$$\alpha(n, p) = E(n, p)^{1/2}$$

$$\beta(n, p) = \frac{2}{3}[D(n, p) + E(n, p)^{1/2}]$$

$$\tilde{\alpha}(n, p) = \frac{2n}{(n+p-1)}[2D(n, p) + 5E(n, p)^{1/2}]^{-1}$$

本文首先获得一个推广的 Simons 不等式 (引理 1), 然后用它给出如下定理.

定理 1 设 N^{n+p} 是 ($n = p$) 维 ($p \geq 2$) 单连通共形平坦黎曼流形, T_c 和 t_c 分别是 N 的 Ricci 曲率的上确界和下确界. 如果 $T_c - t_c \leq \tilde{\alpha}(n, p) T_c$ 并且存在 N 的一个 n 维紧致极小子流形 M , 其第二基本形式模长平方 S 满足

$$\alpha(n, p)(T_c - t_c) \leq S \leq$$

$$\frac{2n}{3(n+p-1)}T_c - \beta(n, p)(T_c - t_c)$$

则 N 必为空间形式, 并且 M 或是全测地的, 或是 S^4 中 Veronese 曲面.

注 当 N^{n+p} (1) 时, $T_c = t_c = n + p - 1$, 定理 1 的条件成为 $S \leq \frac{2}{3}n$, 故定理 1 推广了定理 A.

2 准 备

设 M^n 是 ($n + p$) 维黎曼流形 N^{n+p} 中 n 维浸入子流形, 约定指标范围为

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n + p, \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n$$

$$n + 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n + p$$

取 N 的么正局部标架场 $\{e_A\}$ 使之限制于 M 时有 $\{e_i\}$ 切于 M . 令 $\{\omega_A\}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场, $\{\omega_{AB}\}$ 是 N 的联络 1-形式, 限制于 M 时有^[2-4]

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{\bar{i}}^\alpha = h_{ij}^\alpha \quad (1)$$

$$h = \sum_{\alpha j} h_{ij}^\alpha \omega_j e_\alpha, \quad \xi = \frac{1}{n} \sum_{\alpha i} h_{ij}^\alpha e_\alpha \quad (2)$$

$$R_{ijk\ell} = K_{ijk\ell} + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{j\ell}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \quad (3)$$

$$R_{\alpha\beta k\ell} = K_{\alpha\beta k\ell} + \sum_i (h_{ik}^\alpha h_{i\ell}^\beta - h_{i\ell}^\alpha h_{ik}^\beta) \quad (4)$$

其中, h , ξ , $R_{ijk\ell}$, $R_{\alpha\beta k\ell}$ 分别是 M 的第二基本形式, M 的平均曲率向量, M 的法曲率张量和 M 的曲率张量, K_{ABCD} 是 N 的曲率张量. 若 N^{n+p} 是共形平坦的, 则^[5]

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n+p-2} \circ$$

$$[\hat{\partial}_C K_{BD} - \hat{\partial}_D K_{BC} + K_{AC} \hat{\partial}_D - K_{AD} \hat{\partial}_C -$$

$$\frac{K}{n+p-1}(\hat{\partial}_C \hat{\partial}_D - \hat{\partial}_D \hat{\partial}_C)] \quad (5)$$

$$K_{AB} = \sum_C K_{ACBC}, \quad K = \sum_A K_{AA}$$

定义^[2-4]

$$S = \|h\|^2, \quad H = \|\xi\|, \quad A_\alpha = (h_{ij}^\alpha)_{n \times n} \quad (6)$$

若 $H=0$ 在 M 上成立, 则 M 称为极小的.

* 收稿日期: 2003-03-18

作者简介: 王 琪 (1963 年生), 男, 讲师, 理学硕士.

定义 h_{ij}^α 的协变导数 h_{ijk}^α 和 h_{ijkl}^α 如下^[2,3]

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha \omega_k = dh_{ij}^\alpha + \sum_s h_{sj}^\alpha \omega_{is} + \sum_s h_{is}^\alpha \omega_{js} + \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_{\alpha\beta}$$
$$\sum_l h_{ijkl}^\alpha \omega_l = dh_{ijk}^\alpha + \sum_s h_{sjk}^\alpha \omega_{is} + \sum_s h_{isk}^\alpha \omega_{sj} + \sum_s h_{ijs}^\alpha \omega_{sk} + \sum_\beta h_{ijk}^\beta \omega_{\alpha\beta}$$

则有

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = -K_{\alpha jk} \tag{7}$$
$$h_{ijkl}^\alpha - h_{ijlk}^\alpha = \sum_s h_{ijs}^\alpha R_{s k l} + \sum_s h_{isk}^\alpha R_{s j l} + \sum_\beta h_{ij}^\beta R_{\beta \alpha l} \tag{8}$$

将 $K_{\alpha jk}$ 看作 $T^\perp(M) \otimes T^*(M) \otimes T^* \otimes T^*(M)$ 的截面, 定义其协变导数 $K_{\alpha jkl}$ 如下^[2,3]

$$\sum_l K_{\alpha jkl} \omega_l = dK_{\alpha jk} + \sum_s K_{\alpha s jk} \omega_{is} + \sum_s K_{\alpha i s k} \omega_{js} + \sum_s K_{\alpha i j s} \omega_{k s} + \sum_\beta K_{\beta j k} \omega_{\alpha\beta}$$

h_{ij}^α 的 Laplacian 定义为^[2,3]

$$\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{ijk}^\alpha \omega_k$$

参考文献 [2] [3] 的计算, 由 (7), (8) 两式并注意 M 是极小的, 有

$$\frac{1}{2} \Delta S = A + B + C \tag{9}$$

其中 (以下 tr 表示对矩阵求迹)

$$A = - \sum_{\alpha\beta} \text{tr}[(A_\beta A_\alpha - A_\alpha A_\beta)(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)] - \sum_{\alpha\beta} [\text{tr}(A_\alpha A_\beta)]$$

$$B = \sum_{ijm\alpha} (h_{mj}^\alpha h_{ik}^\alpha K_{mk\alpha} + h_{mk}^\alpha h_{ij}^\alpha K_{mjk}^\alpha) + \sum_{ijk\alpha} (h_{ij}^\alpha h_{ki}^\beta K_{\alpha\beta j} + h_{ik}^\beta h_{ij}^\alpha K_{\alpha\beta k})$$
$$C = \sum_{ijk\alpha} (h_{jk}^\alpha)^2 - \sum_{ijk\alpha} (h_{ij}^\alpha K_{\alpha k i j} + h_{jk}^\alpha K_{\alpha i j k})$$

此外, 由文献 [1], [2], 当 $p \geq 2$ 时

$$A \geq -\frac{3}{2} S^2 \tag{10}$$

又若 N^{n+p} 是共形平坦的, T_c 和 t_c 分别是 N^{n+p} 的 Ricci 曲率的上、下确界, 则

$$K_{\alpha i} = S^N(e_\alpha, e_i) = S^N\left(\frac{e_\alpha + e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_\alpha + e_i}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} S^N(e_i, e_i) - \frac{1}{2} S^N(e_\alpha, e_\alpha)$$

从而

$$-(T_c - t_c) \leq K_{\alpha i} \leq (T_c - t_c) \tag{11}$$

其中, S^N 是 N 的 Ricci 曲率张量.

3 定理 1 的证明

引理 1 (推广的 Simons 不等式) 设 M^n 是 $(n+p)$ 维共形平坦黎曼流形 N^{n+p} ($p \geq 2$) 中 n 维紧致极小子流形, T_c 和 t_c 分别表示 N 的 Ricci 曲率的上确界和下确界, 则

$$\int_M \left\{ \frac{nT_c}{n+p-1} S - \frac{3}{2} S^2 - D(n, p)(T_c - t_c)S - E(n, p)(T_c - t_c)^2 \right\} \leq 0$$

其中常数 $D(n, p), E(n, p)$ 如本文引言所定义.

证明 先给出 (9) 式中 B 的一个下界. 因 N 是共形平坦的, 由 (5) 有

$$K_{\alpha ij} = 0 \quad (\forall \alpha, \beta, k, j)$$

对固定的 α , 取 $\{e_i\}$ 使 (h_{ij}^α) 对角化, 即

$$h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \quad (\forall i, j)$$

于是,

$$\sum_{ijk\alpha} h_{mj}^\alpha h_{ik}^\alpha K_{mk\alpha} + \sum_{ijk\alpha} h_{mk}^\alpha h_{ij}^\alpha K_{mjk}^\alpha + \sum_{ijk\beta} h_{ij}^\alpha h_{ki}^\beta K_{\alpha\beta j} = \sum_k (\lambda_i^\alpha)^2 K_{ikk} + \sum_{ik} \lambda_i^\alpha \lambda_k^\alpha K_{kik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 K_{ikk} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{1}{n+p-2} \left[(K_{kk} + K_{ii}) - \frac{K}{n+p-1} \right] (\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 \geq \frac{n}{n+p-2} \left(2t_c - \frac{n+p}{n+p-1} T_c \right) \text{tr} A_\alpha^2$$

从而

$$B \geq \frac{nT_c}{n+p-1} S - \frac{2n}{n+p-2} (T_c - t_c) S$$

即

$$B \geq \frac{nT_c}{n+p-1} S - D(n, p)(T_c - t_c) S \tag{12}$$

再估计 (9) 中的 C . 参考文献 [2], [3] 有

$$C = \sum_{ijk\alpha} (h_{jk}^\alpha)^2 + \sum_{ijk\alpha} (h_{ikk}^\alpha K_{\alpha j j} + h_{jkk}^\alpha K_{\alpha i j k}) - \text{div } \omega \tag{13}$$

其中

$$\omega = \sum_{ijk\alpha} (h_{ik}^\alpha K_{\alpha j j} + h_{ij}^\alpha K_{\alpha j k}) \omega_k$$
$$\text{div } \omega = \sum_{j k \alpha} \nabla_k (h_{ikk}^\alpha K_{\alpha j j} + h_{jkk}^\alpha K_{\alpha i j k})$$

因 M 是极小的, 故

$$\sum_i h_{ij}^\alpha = 0, \quad \forall j, \alpha \tag{14}$$

由式 (5), (7), (11) 和 (14) 得

$$\sum_{ijk\alpha} h_{ikk}^\alpha K_{\alpha j j} = \sum_{j k \alpha} (h_{k k i}^\alpha - K_{\alpha k i k}) K_{\alpha j j} = - \sum_{i \alpha} \left(\sum_{j(\neq i)} K_{\alpha j j} \right)^2 = - \frac{(n-1)^2}{(n+p-2)^2} \sum_{i \alpha} (K_{\alpha i})^2 \geq - \frac{pn(n-1)^2}{(n+p-2)^2} (T_c - t_c)^2 \tag{15}$$

另一方面, 注意 $K_{\alpha j k} = 0$ (i, j, k 互异) 有

$$\sum_{ijk\alpha} (h_{jk}^\alpha)^2 + \sum_{ijk\alpha} h_{jkk}^\alpha K_{\alpha i j k} \geq - \frac{1}{4} \sum_{ijk\alpha} (K_{\alpha j k})^2 \geq - \frac{1}{4} \sum_\alpha \sum_{i, j, k \text{ 互异}} (K_{\alpha j k})^2 = - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{i \neq j} (K_{\alpha i j})^2 = - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{i \neq j} \frac{1}{(n+p-2)^2} (K_{\alpha j})^2 \geq$$

$$-\frac{pn(n-1)}{2(n+p-2)^2}(T_c-t_c)^2 \tag{16}$$

由式 (13), (15), (16) 有

$$C \geqslant -\frac{pn(n-1)(2n-1)}{2(n+p-2)^2}(T_c-t_c)^2 - \operatorname{div} \omega$$

即

$$C \geqslant -E(n,p)(T_c-t_c)^2 - \operatorname{div} \omega \tag{17}$$

由 Green 散度定理, 从 (17) 得

$$\int_M C \geqslant -\frac{pn(n-1)(2n-1)}{2(n+p-2)^2} \int_M (T_c-t_c)^2,$$

即

$$\int_M C \geqslant -E(n,p) \int_M (T_c-t_c)^2 \tag{18}$$

现在, 对 (9) 式两边积分, 由 (10), (12), (18) 有

$$\int_M \left\{ \frac{nT_c}{n+p-1} S - \frac{3}{2} S^2 - D(n,p)(T_c-t_c) S - E(n,p)(T_c-t_c)^2 \right\} \leqslant 0 \tag{19}$$

这就证明了引理 1.

定理 1 的证明 定理 1 的条件

$$T_c - t_c \leqslant \frac{2}{3} \alpha(n,p) T_c$$

保证了

$$\alpha(n,p)(T_c-t_c) \leqslant$$

$$\frac{2n}{3(n+p-1)} T_c - \beta(n,p)(T_c-t_c)$$

另外易知, 当定理 1 的假设

$$\alpha(n,p)(T_c-t_c) \leqslant S \leqslant \frac{2n}{3(n+p-1)} T_c - \beta(n,p)(T_c-t_c) \tag{20}$$

满足时, 必有

$$\frac{nT_c}{n+p-1} S - \frac{3}{2} S^2 - D(n,p)(T_c-t_c) S - E(n,p)(T_c-t_c) \geqslant 0 \tag{21}$$

因此, 在条件 (20) 下, (19), (21) 均取等号. 这表明 $T_c = t_c$, 从而 N^{n+p} 事实上是截曲率为某个常数 c 的常曲率流形. 注意 N 是单连通的, N 必为空间形式 $S^{n+p}(c)$. 此时 (21) 归结为

$$ncS - \frac{3}{2} S^2 = 0$$

从而, 在 M 上有

$$S \equiv 0 \quad \text{或} \quad S \equiv \frac{2}{3} nc$$

直接由 [1] 或 [4] 知, M 或是全测地的, 或是 S^4 中 Veronese 曲面.

参考文献:

[1] LI A M, LI J M. An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere[J]. Aach Math, 1992, 58: 582—594.
[2] XU H W. On closed minimal submanifolds[J]. Transactions of the Americal Mathematical Society, 1995, 347(5): 1743—1751.
[3] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature I [J]. Amer J Math, 1974, 96: 346—366.
[4] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature II [J]. Amer J Math, 1975, 97: 76—100.
[5] CHEN G H, XU S L. Rigidity of compact minimal submanifolds in a locally symmetric and conformally flat Riemann manifold[J]. Mathemtica Sci, 1996, 16(1): 89—96.

A Pinching Theorem for Submanifolds of Conformally Flat Riemannian Manifolds

WANG Qi

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China)

Abstract: The author first works out a generalized Simons inequality, then proves a pinching theorem of minimal submanifolds to the ambient Ricmannian manifolds by using the generalized inequality.

Key words: conformally flat; compact minimal submanifolds; Ricci curvature; pinching