

小波空间的不规则采样*

罗世平

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 探讨了小波空间的不规则采样问题, 证明了当采样集满足适当的采样条件和小波空间的尺度函数满足某些条件时, 对于小波空间的函数, 可以由它的采样值稳定和惟一地重建。

关键词: 不规则采样; 小波空间; 重建算法

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 02-0012-03

1 问题的背景及引理

数字信号处理总是通过对模拟信号进行采样而转换成数字信号, 然后再进行数字信号处理。这样就产生了2个问题, 一是采样值 $\{f(x_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 是否能够重建信号, 二是如何重建信号。为了从采样值稳定而且惟一地重建信号, 采样值 $\{f(x_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 应该满足^[1]

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} |f(x_j)|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

其中, A, B 是与 $f(x)$ 无关的正的常数。

近几年来, 不规则采样问题受到广泛关注, 2000年, Aldroubi 与 Grochenig 在文 [2] 中证明了对于样条小波空间, 当 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足一定的条件时, 采样值 $\{f(x_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 使 (1) 式成立。对于一般的小波空间, 若 $\varphi(x)$ 具有适当的光滑性与衰减性时, 2002年, Chen 等证明了当 δ_k 满足适当的条件时, 采样值 $\{f(k + \delta_k), k \in \mathbf{Z}\}$ 使 (1) 式成立。

若一系列子空间 $\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 以及尺度函数 $\varphi(x)$ 构成一个多尺度分析, 则空间 $V_0 = \{\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(x - k), \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2 < +\infty\}$ 。下面证明对于空间 V_0 中的函数, 若采样集满足适当的条件时, $f(x)$ 能够由其采样值稳定而且惟一地重建。首先介绍2个引理。

引理 1^[4] (Wirtinger 不等式)

(1) 设 $f(x), f'(x) \in L^2(a, b)$ 而且有 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$, 则有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{4}{\pi^2} (b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

(2) 设 $f(x), f'(x) \in L^2(a, b)$, 并且 $f(a) = f(b) = 0$, 则有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx \quad (2)$$

引理 2^[3] 设 $\varphi(x)$ 连续可微, $\{\varphi(x-n), n \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基, 下界为 A , 并且满足

(1) 当 $x \rightarrow \pm \infty$ 时, $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{0.5+\epsilon}}\right)$ 以及

$$\varphi'(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{0.5+\epsilon}}\right)。$$

(2) $M = \sup_{\omega} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\omega + 2k\pi)^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 < +\infty$ 。

对 $f(x) \in V_0$, 若 $f(x)$ 可微, 则有

$$\|f'\| \leq \sqrt{\frac{M}{A}} \|f\|$$

2 空间 V_0 中的采样条件

设采样集为 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$, 并且存在常数 $T > d > 0$ 使得:

$$0 < d \leq x_{j+1} - x_j \leq T < +\infty \quad (3)$$

设 $y_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$, $\chi_j(x) = \chi_{[y_{j-1}, y_j]}(x)$, 则有

$$y_j - x_j \leq \frac{T}{2}, x_j - y_{j-1} \leq \frac{T}{2},$$

$$y_j - y_{j-1} \geq d \quad (4)$$

对任意 $x \in \mathbf{R}$, $\chi_j(x)$ 满足 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_j(x) = 1$ 。当采样集 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足什么条件时, 对于 V_0 中的函数, 其采样值使 (1) 成立? 首先有

定理 1 设采样集为 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$, $\lim_{j \rightarrow \pm \infty} x_j = \pm \infty$, $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足 (3) 式, $\varphi(x)$ 满足引理 2 的条

* 收稿日期: 2002-08-15

作者简介: 罗世平 (1969年生), 男, 博士研究生; E-mail: hblshp@yahoo.com

件,则对任意 $f(x) \in V_0$ 有

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} |f(x_j)|^2 \leq C \|f\|^2$$

证明 对于 $x \in [y_{j-1}, y_j]$, 有 $|f(x_j)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x)|$, 在上式两边取平方, 得 $|f(x_j)|^2 \leq 2|f(x) - f(x_j)|^2 + 2|f(x)|^2$ 从 y_{j-1} 到 y_j 积分, 有

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x_j)|^2 dx \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} 2|f(x) - f(x_j)|^2 dx + 2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x)|^2 dx \quad (5)$$

利用引理1得

$$\begin{aligned} d|f(x_j)|^2 &\leq 2 \frac{4}{\pi^2} (x_j - y_{j-1})^2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f'(x)|^2 dx + \\ &2 \frac{4}{\pi^2} (y_j - x_j)^2 \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f'(x)|^2 dx + 2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x)|^2 dx \leq \\ &2 \frac{1}{\pi^2} T^2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f'(x)|^2 dx + \\ &2 \frac{1}{\pi^2} T^2 \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f'(x)|^2 dx + 2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x)|^2 dx \leq \\ &2 \frac{1}{\pi^2} T^2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f'(x)|^2 dx + 2 \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x)|^2 dx \quad (6) \end{aligned}$$

两边对 j 求和

$$\begin{aligned} d \sum_{j \in \mathbf{Z}} |f(x_j)|^2 &\leq \\ 2 \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f'(x)|^2 dx + 2 \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x)|^2 dx &= \\ 2 \frac{T^2}{\pi^2} \|f'\|^2 + 2 \|f\|^2 &\leq \\ 2 \left(\frac{MT^2}{A\pi^2} + 1 \right) \|f\|^2 \quad (7) \end{aligned}$$

由此可得定理成立, 其中 $C = 2 \frac{MT^2}{d\pi^2 A} + \frac{2}{d}$ 。与定理1类似证明, 可得下面的结论。

定理2 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 是采样集, $\lim_{j \rightarrow \pm \infty} x_j = \pm \infty$, $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足(3)式, 若 $\varphi(x)$ 满足引理2的条件, $T < \pi \sqrt{\frac{A}{2M}}$, 则对任意 $f(x) \in V_0$ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \left(1 - \frac{2MT^2}{A\pi^2} \right) \|f\|^2 &\leq \\ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |f(x_j)|^2 &\leq 2 \left(\frac{MT^2}{dA\pi^2} + \frac{1}{d} \right) \|f\|^2 \quad (8) \end{aligned}$$

若 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足定理2的条件, 则 $\{f(x_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 使(1)式成立, 从而 $f(x)$ 能够由其采样值稳定而且惟一地重建。设 $\{\lambda_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 是另一个采样集, 这2个采样集之间要满足什么条件, 才能使函数在 $\{\lambda_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 的采样值也满足(1)式, 从而 $f(x)$ 也能够

由采样值 $\{f(\lambda_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 重建。

设 $\{\varphi(x-n), n \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基, 这时其再生核

$$K_x(y) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(x-n) \varphi(y-n)$$

若 $f(x)$ 也能够有采样值 $\{f(\lambda_j), j \in \mathbf{Z}\}$ 重建, 则 $\{K_{\lambda_j}(y), j \in \mathbf{Z}\}$ 也构成 V_0 的框架。下面考虑 $\{K_{\lambda_j}(y), j \in \mathbf{Z}\}$ 何时构成 V_0 的框架。

定理3 设 $j \rightarrow \pm \infty$ 时, $x_j = O(j), \lambda_j = O(j)$, $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\varphi'(x+k)| \leq C < +\infty, \{K_{\lambda_j}(y), j \in \mathbf{Z}\}$ 构成 V_0 的框架, 下界为 A , 上界为 B , 则存在常数 $M < \sqrt{\frac{A}{C}}$, 使得当 $|x_j - \lambda_j| < M$ 时, 有

$$(A - M^2 C^2) \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_{\lambda_j}(y) \right\|^2 \leq (B + M^2 C^2) \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 \quad (9)$$

其中, $\sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 < +\infty$ 。

证明 利用 $\{\varphi(y-n), n \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基, 可以有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_{\lambda_j}(y) - \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_{x_j}(y) \right\|^2 &= \\ \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(x_j - n) \varphi(y - n) - \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(\lambda_j - n) \varphi(y - n) \right\|^2 &= \\ \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\| \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_j [\varphi(x_j - n) - \varphi(\lambda_j - n)] \right\|^2 &\leq \\ \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} |c_j| |\varphi(x_j - n) - \varphi(\lambda_j - n)| \cdot |c_l| |\varphi(x_l - n) - \varphi(\lambda_l - n)| &\leq \\ \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\varphi(x_j - n) - \varphi(\lambda_j - n)| \cdot |\varphi(x_l - n) - \varphi(\lambda_l - n)| (|c_j|^2 + |c_l|^2) &= \\ \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\varphi(x_j - n) - \varphi(\lambda_j - n)| \cdot |\varphi(x_l - n) - \varphi(\lambda_l - n)| |c_j|^2 &= \\ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\varphi(x_j - n) - \varphi(\lambda_j - n)| \cdot \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\varphi(x_l - n) - \varphi(\lambda_l - n)| &= \\ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 |x_j - \lambda_j| \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\varphi'(x_j - n + \theta_1(x_j - \lambda_j))| \cdot \sum_{l \in \mathbf{Z}} |x_l - \lambda_l| |\varphi'(x_l - n + \theta_2(x_l - \lambda_l))| &\leq \\ M^2 C^2 \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 \quad (10) \end{aligned}$$

由(10)式有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_{\lambda_j}(y) \right\|^2 - M^2 C^2 \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 &\leq \\ \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_{x_j}(y) \right\|^2 &\leq \end{aligned}$$

$$M^2 C^2 \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 + \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j K_j(\gamma) \right\|^2. \quad (11)$$

根据定理条件可得 (9) 式成立。

定理 2 已经证明了采样值何时能够重建函数, 下面考虑如何由采样值重建函数 $f(x)$ 。设 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 为采样集, $f(x) \in V_0$ 连续可微, $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$ 都存在, 而且 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k-1)}(x) \in V_0$, 采样值 $f(x_j), f'(x_j), \dots, f^{(k)}(x_j), j \in \mathbf{Z}$ 已知, 设

$$Q[f(x)] = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_j \left[f(x_j) + \frac{f'(x_j)(x-x_j)}{1!} + \dots + \frac{f^{(k)}(x_j)(x-x_j)^k}{k!} \right] \quad (12)$$

$P: L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_0$ 是正交投影算子。则有下列的快速重建算法。

定理 4 设采样集 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足定理 2 的条件, 则对于任意 $f(x) \in V_0$, $f(x)$ 能够由下面的迭代重建算法重建。

$$\begin{cases} f_1(x) = PQf(x) \\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + PQ[f(x) - f_n(x)] \end{cases}$$

并且有

$$\|f - f_{n+1}\|^2 \leq \left(\frac{MT^2}{A\pi^2} \right)^{(n+1)(k+1)} \|f - f_1\|^2$$

证明 根据文 [4] 中的引理 3, 只需要证明 $\|I - PQ\| < 1$ 。

$$\begin{aligned} \|f - PQf\|^2 &= \|Pf - PQf\|^2 \leq \|f - Qf\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_j f - \sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_j \left[f(x_j) + \frac{f'(x_j)(x-x_j)}{1!} + \dots + \frac{f^{(k)}(x_j)(x-x_j)^k}{k!} \right] \right\|^2 = \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| f(x) - \left[f(x_j) + \frac{f'(x_j)(x-x_j)}{1!} + \dots + \frac{f^{(k)}(x_j)(x-x_j)^k}{k!} \right] \right|^2 dx \leq \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{T^2}{\pi^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| f'(x) - \left[f'(x_j) + \frac{f''(x_j)(x-x_j)}{1!} + \dots + \frac{f^{(k+1)}(x_j)(x-x_j)^k}{k!} \right] \right|^2 dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots + \frac{f^{(k)}(x_j)(x-x_j)^{(k-1)}}{(k-1)!} \Big|^2 dx \leq \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{T^4}{\pi^4} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| f''(x) - \left[f''(x_j) + \frac{f'''(x_j)(x-x_j)}{1!} + \dots + \frac{f^{(k+2)}(x_j)(x-x_j)^{(k-2)}}{(k-2)!} \right] \right|^2 dx \leq \dots \leq \\ &= \left(\frac{T^2}{\pi^2} \right)^k \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_j)|^2 dx \leq \\ &= \left(\frac{T^2}{\pi^2} \right)^{k+1} \|f^{(k+1)}\|^2 \leq \left(\frac{MT^2}{A\pi^2} \right)^{k+1} \|f\|^2 \end{aligned}$$

由此可得 $\|I - PQ\| \leq \left(\frac{T\sqrt{M}}{\pi\sqrt{A}} \right)^{k+1}$, 由定理条件可知 $\|I - PQ\| < 1$, 因此迭代算法收敛。再由 $\|f - f_{n+1}\| \leq \|I - PQ\|^n \|f - f_1\|$, 可得定理成立。

定理 4 说明若采样集 $\{x_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足定理 2 的条件, 则 $f(x)$ 可由其采样值重建, 若 $f(x)$ 的 k 阶导数存在, 而且 k 阶导数的采样值已知, 则迭代算法收敛速度很快, 若 $k \geq 2$ 时, $f^{(k)}$ 不存在, 则只需在 (12) 式中取 $k = 1$ 就可以了。

致谢: 感谢林伟教授对本文的悉心指导。

参考文献:

- [1] ALDROUBI A, GROCHENIG K. Non-uniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces[J]. SIAM Rev, 2001, 43(4): 585 - 620.
- [2] ALDROUBI A, GROCHENIG K. Beurling-Landau type theorems for non-uniform sampling in shift invariant spline space [J]. J Fourier Anal Appl, 2000, 6: 93 - 103.
- [3] LIU Y M. Irregular sampling for spline wavelet subspaces[J]. IEEE Transaction On Information Theory, 1996, 42(2): 623 - 637.
- [4] GROCHENIG K. Reconstruction algorithms in irregular sampling[J]. Mathematics of Coputation, 1992, 59: 181 - 194.

The Irregular Sampling in Wavelet Subspaces

LUO Shi-ping

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The irregular sampling in wavelet subspaces is discussed, suppose the scaling function has some properties, one kind of sampling conditions is obtained such that the function can be reconstructed from the sampling values uniquely and stably.

Key words: irregular sampling; wavelet subspace; reconstruction algorithm