

# 四阶反应扩散方程的渐近吸引子<sup>\*</sup>

邝雪松

(湛江海洋大学基础部, 广东 湛江 524088)

**摘 要:** 研究了四阶反应扩散方程  $u_t + \alpha u_x^4 + u_x^2 + u^3 - u = 0$  的渐近吸引子, 即构造了一个有限维解序列。首先利用数学归纳法证明了该解序列不会远离方程的整体吸引子, 其次证明了它在长时间后趋于方程的整体吸引子, 并且给出了渐近吸引子的维数估计。

**关键词:** 四阶反应扩散方程; 解序列; 渐近吸引子

**中图分类号:** O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 06-0015-04

在研究无穷维动力系统动力学性质的过程中, 人们相继建立了整体吸引子和惯性流形<sup>[1,2]</sup>, 将一个无穷维系统约化为一个有限维系统。但是要进一步研究约化后的系统仍然很困难; 人们又相继引入了近似惯性流形, 指数吸引子和近似吸引子的概念<sup>[3,4]</sup>, 可是利用它们所得的近似系统与原系统之间很难建立起严格的等价关系, 王冠香等<sup>[5]</sup>引入了有限维渐近吸引子的概念。

定义 1<sup>[5]</sup> 对一个发展系统

$$u_t + Au = f(u) \quad (1)$$

记相空间为  $H$ , 解算子半群为  $\{S(t), t \geq 0\}$ , 吸收集为  $\mathcal{B}$ 。假设对任意  $u_0 \in \mathcal{B}$  存在  $N$  维子空间的近似解序列  $\{u^k(t)\}, k \geq 1$ , 满足

$$\begin{aligned} \|u^k(t) - S(t)u_0\|_H &\rightarrow 0, \\ k &\rightarrow +\infty, t \geq t^*(\mathcal{B}) \end{aligned} \quad (2)$$

则定义  $\mathcal{A} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{u_0 \in \mathcal{B}} u^k(t)}$  为系统(1)的渐近吸引子, 其中  $\|\cdot\|_H$  为相空间  $H$  的范数,  $u^k(t)$  依赖于初值  $u_0, t^*(\mathcal{B})$  只依赖于吸收集半径, 且对  $\mathcal{B}$  中的  $u_0$  是一致的, 因为  $u^k(t)$  为  $N$  维系统的解,  $\mathcal{A}$  的结构较易讨论, (2) 式保证了  $u^k(t)$  对真解  $u(t)$  的渐近逼近性。

考虑一维周期边界条件下的四阶反应扩散方程:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u_x^4 + u_x^2 + u^3 - u &= 0, \\ (x, t) &\in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_x^j(x, t) = u_x^j(x + 2\pi, t), \quad j = 0 \sim 3 \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) = u_0(x + 2\pi) \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} u(x, t) dx = 0 \quad (6)$$

其中,  $\alpha > 0, u_x^j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$ , 文 [6, 7] 讨论了系统 (3) — (6) 解的存在惟一性, 整体吸引子的存在性及其维数估计, 本文则将讨论它的渐近吸引子。

## 1 预备知识及解序列的构造

首先引入关于系统 (3) — (6) 的吸收集结论<sup>[6]</sup>:

引理 1 对任意初值  $u_0 \in L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$ , 若满足  $\|u_0\| \leq R (< \infty)$ , 则存在时间  $t^* = t^*(R)$  和  $\rho_0, \rho_1 > 0$ , 使得  $\|u(x, t)\| \leq \rho_0, \|u_x(x, t)\| \leq \rho_1, t \geq t^*$ , 其中  $\|\cdot\|$  表示  $L^2$  模 (以下相同), 即是说,  $\mathcal{B} = \{u \in H^1_{\text{per}}([0, 2\pi]), \|u\| \leq \rho_0, \|u_x\| \leq \rho_1\}$  是系统 (3) — (6) 的吸收集。

由于  $L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$  具有完备正交基  $\{\sin kx, \cos kx, k = 1, 2, \dots\}$ , 所以对  $N \in \mathbf{N}$ , 可记其  $N$  维子空间  $\text{span}\{\sin kx, \cos kx, k = 1, 2, \dots, N\}$  为  $H_N$ , 记  $L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$  到  $H_N$  的  $N$  维正交投影为  $P_N$ , 而  $Q_N = I - P_N$ 。对  $u(x, t) \in L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$ , 记  $p = P_N u, q = Q_N u$ , 则  $u = p + q$ , 用正交投影  $P_N$  可将方程分为两部分:

$$p_t + \alpha p_x^4 + p_x^2 + P_N(u^3) - p = 0 \quad (7)$$

$$q_t + \alpha q_x^4 + q_x^2 + Q_N(u^3) - q = 0 \quad (8)$$

对任意初值

$$u_0(x) \in \mathcal{B}$$

按如下方式构造渐近解序列:

\* 收稿日期: 2002-12-01

作者简介: 邝雪松 (1966 年生) 男, 讲师, E-mail: kuangxs@zjnu.edu.cn

$$\begin{cases} q_t^0 + \alpha q_x^4 + q_{x^2}^0 + Q_N(p^3) - q^0 = 0 \\ q^0(x, t) = q^0(x + 2\pi, t) \\ q^0(x, 0) = Q_N u_0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} q_t^k + \alpha q_x^k + q_{x^2}^k + Q_N[(u^{k-1})^3] - q^k = 0 \\ q^k(x, t) = q^k(x + 2\pi, t) \\ q^k(x, 0) = Q_N^k u_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $u^k = p + q^k$ ,  $Q_N^k = Q_N - Q_{2^{k+1}N}$ , 系统(9), (10) 的解的存在惟一性问题类似系统(3) - (6) 得到。

## 2 主要结论

将证明由(9), (10) 构造的解序列  $u^k(x, t)$  可以得到系统(3) - (6) 的渐近吸引子, 关键证明(2) 式。首先推证, 对  $u_0 \in \mathcal{B}$  上述解序列不会远离吸收集  $\mathcal{B}$ 。

**定理 1** 设  $u(x, t)$  是对应于初值  $u_0 \in \mathcal{B}$  的系统(3) - (6) 的解,  $q^k(k = 0, 1, 2, \dots)$  按(9), (10) 给出, 则存在  $N_0 \in \mathbb{N}$  和  $t_1^*(\mathcal{B})$ , 使得当  $N \geq N_0$  时,  $\|u^k\| \leq 2\rho_0, \|u_x^k\| \leq 2\rho_1$ ,  $t \geq t_1^*, k = 0, 1, 2, \dots$  (11)

成立。

**证明** 由吸收集的正不变性,  $u_0 \in \mathcal{B}$  得到  $u(t) \in \mathcal{B}, t \geq 0$ , 从而  $\|p\| \leq \rho_0, \|p_x\| \leq \rho_1$ 。那么, 要证明(11) 式, 只须证明  $\|q^k\| \leq \rho_0, \|q_x^k\| \leq \rho_1, k = 0, 1, 2, \dots$  (12)

下面使用数学归纳法证明(12) 式。

由(9) 式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q^0\|^2 + \alpha \|q_{x^2}^0\|^2 - \|q_x^0\|^2 - \|q^0\|^2 + (Q_N(p^3), q^0) = 0, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q^0\|^2 + [\alpha(N+1)^4 - (N+1)^2 - 1] \|q^0\|^2 \leq \|p^3\| \|q^0\| \leq \rho_0^3 \|q^0\| \end{aligned}$$

令  $E(N) = \alpha N^4 - N^2 - 2$ , 由 Young 不等式<sup>[3]</sup> 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q^0\|^2 + E(N+1) \|q^0\|^2 \leq \frac{E(N+1)}{2} \|q^0\|^2 + \frac{\rho_0^6}{2E(N+1)} \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \|q^0\|^2 + E(N+1) \|q^0\|^2 \leq \frac{\rho_0^6}{E(N+1)}$$

由 Gronwall 不等式有,

$$\begin{aligned} & \|q^0(t)\|^2 \leq \|q^0(0)\|^2 e^{-E(N+1)t} + \frac{\rho_0^6}{E(N+1)^2} (1 - e^{-E(N+1)t}) \end{aligned}$$

故存在时间

$$t_{11}^*(\mathcal{B}) = \frac{2}{E(N+1)} \ln \frac{E(N+1)}{\rho_0^2}$$

使得  $\|q^0\|^2 \leq \frac{2\rho_0^6}{E(N+1)^2}, t \geq t_{11}^*$

即  $\|q^0\| \leq \frac{\sqrt{2}\rho_0^3}{E(N+1)}, t \geq t_{11}^*$

所以, 当  $N$  充分大, 即满足

$$\frac{\sqrt{2}\rho_0^3}{E(N+1)} \leq 1 \quad (13)$$

时, 则有

$$\|q^0\| \leq \rho_0, t \geq t_{11}^* \quad (14)$$

又由(9) 式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q_x^0\|^2 + \alpha \|q_{x^3}^0\|^2 - \|q_{x^2}^0\|^2 - \|q_x^0\|^2 \leq \|p^3\| \|q_{x^2}^0\| \leq \rho_0^3 \|q_{x^2}^0\|, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q_x^0\|^2 + [\alpha(N+1)^2 - 1] \|q_x^0\|^2 \leq \frac{\alpha(N+1)^2 - 1}{2} \|q_{x^2}^0\|^2 - \|q_x^0\|^2 \leq \frac{\alpha(N+1)^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\|q_{x^2}^0\|^2 + \frac{\rho_0^6}{2[\alpha(N+1)^2 - 1]},$$

$$\frac{d}{dt} \|q_x^0\|^2 + E(N+1) \|q_x^0\|^2 \leq \frac{\rho_0^6}{\alpha(N+1)^2 - 1}$$

由 Gronwall 不等式, 存在

$$\begin{aligned} & t_{12}^*(\mathcal{B}) = \frac{1}{E(N+1)} \ln \frac{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]}{\rho_0^4} \end{aligned}$$

使得

$$\|q_x^0\|^2 \leq \frac{2\rho_0^6}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]}, t \geq t_{12}^*$$

即

$$\|q_x^0\| \leq \frac{\sqrt{2}\rho_0^3}{(E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1])^{\frac{1}{2}}}, t \geq t_{12}^*$$

当  $N$  充分大, 满足

$$\frac{\sqrt{2}\rho_0^3}{(E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1])^{\frac{1}{2}}} \leq \rho_1 \quad (15)$$

时, 有

$$\|q_x^0\| \leq \rho_1, t \geq t_{12}^* \quad (16)$$

(14) 式和 (16) 式证明了(12) 式对  $k = 0$  成立。

现假设(12) 对  $k - 1$  成立, 证明其对  $k$  也成立。

由(10) 式, 类似前面的讨论, 可以得到

① 存在  $t_{13}^*(\mathcal{B}) = \frac{2}{E(N+1)} \ln \frac{E(N+1)}{8\rho_0^2}$

当  $N$  充分大, 使

$$\frac{8\sqrt{2}\rho_0^3}{E(N+1)} \leq 1 \quad (17)$$

时, 则有

$$\|q^k\| \leq \rho_0, \quad t \geq t_{13}^* \quad (18)$$

② 存在时间

$$t_{14}^* = \frac{1}{E(N+1)} \ln \frac{E(N+1) \cdot [\alpha(N+1)^2 - 1]}{64\rho_0^4}$$

当  $N$  充分大, 满足

$$\frac{8\sqrt{2}\rho_0^3}{(E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1])^{\frac{1}{2}}} \leq \rho_1 \quad (19)$$

时, 则有

$$\|q^k\| \leq \rho_1, \quad t \geq t_{14}^* \quad (20)$$

(18) 和 (20) 式说明 (12) 式对  $k$  也成立。由归纳法原理,  $N_0$  取满足 (17), (19) 的最小自然数,

$$t_1^* = \max\{t_{11}^*, t_{12}^*, t_{13}^*, t_{14}^*\}$$

(12) 式对一切  $k \in \mathbf{N}$  成立, 定理 1 得证。

**定理 2** 设  $u(x, t)$  是对应于初值  $u_0 \in \mathcal{B}$  的系统 (3) - (6) 的解,  $q^k (k = 0, 1, 2, \dots)$  由 (9) 式给出, 则存在  $N_1 \in \mathbf{N}$  和  $t_2^*(\mathcal{B}) > 0$ , 使得  $N > N_1$  时,

$$\|q_x^k - q_x\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad t \geq t_2^*$$

其中,  $N_1$  为满足  $\frac{48\pi\rho_0^4}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]} < 1$  的最小自然数。

**证明** 记  $w^k = q^k - q$ , 由 (8) 和 (10) 得

$$\begin{aligned} w_t^k + \alpha w_{x^4}^k + w_{x^2}^k - w^k + \\ Q_N[(u^{k-1})^3 - u^3] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

因为

$$\begin{aligned} (u^{k-1})^3 - u^3 = \\ (u^{k-1} - u)[(u^{k-1})^2 + u^{k-1}u + u^2] = \\ w^{k-1}[(u^{k-1})^2 + u^{k-1}u + u^2] \end{aligned}$$

所以 (21) 变为

$$\begin{aligned} w_t^k + \alpha w_{x^4}^k + w_{x^2}^k - w^k + \\ Q_N[w^{k-1}((u^{k-1})^2 + u^{k-1}u + u^2)] = 0 \end{aligned}$$

由上式和不等式<sup>[8]</sup>  $\|u\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \|u_x\|$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x^k\|^2 + \alpha \|w_{x^3}^k\|^2 - \|w_{x^2}^k\|^2 - \\ \|w_x^k\|^2 \leq 12\rho_0^2 \|w^{k-1}\|_{L^\infty} \|w_{x^2}^k\| \leq \\ 2\sqrt{6\pi}\rho_0^2 \|w_x^{k-1}\| \|w_{x^2}^k\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x^k\|^2 + [\alpha(N+1)^2 - 1] \|w_{x^2}^k\|^2 - \|w_x^k\|^2 \leq \\ \frac{\alpha(N+1)^2 - 1}{2} \|w_{x^2}^k\|^2 + \frac{24\pi\rho_0^4 \|w_x^{k-1}\|^2}{2[\alpha(N+1)^2 - 1]} \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \|w_x^k\|^2 + E(N+1) \|w_x^k\|^2 \leq$$

$$\frac{24\pi\rho_0^4}{\alpha(N+1)^2 - 1} \|w_x^{k-1}\|^2 \quad (22)$$

由 (8), (9) 得

$$w_t^0 + \alpha w_{x^4}^0 + w_{x^2}^0 - w^0 + Q_N(p^3 - u^3) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x^0\|^2 + \alpha \|w_{x^3}^0\|^2 - \|w_{x^2}^0\|^2 -$$

$$\|w_x^0\|^2 \leq \|(p^3 - u^3)\| \|w_{x^2}^0\| \leq 9\rho_0^3 \|w_{x^2}^0\|,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x^0\|^2 + [\alpha(N+1)^2 - 1] \cdot$$

$$\|w_{x^2}^0\|^2 - \|w_x^0\|^2 \leq$$

$$\frac{\alpha(N+1)^2 - 1}{2} \|w_{x^2}^0\|^2 + \frac{81\rho_0^6}{2[\alpha(N+1)^2 - 1]}$$

即

$$\frac{d}{dt} \|w_x^0\|^2 + E(N+1) \|w_x^0\|^2 \leq$$

$$\frac{81\rho_0^6}{\alpha(N+1)^2 - 1}$$

由 Gronwall 不等式知, 存在  $t_{20}(\mathcal{B}) > 0$ , 使

$$\|w_x^0\|^2 \leq \frac{162\rho_0^6}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]}, \quad t \geq t_{20}$$

在 (22) 中, 令  $k = 1$ , 则存在  $t_{21}(\mathcal{B}) > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} \|w_x^1\|^2 \leq \frac{48\pi\rho_0^4}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]} \|w_x^0\|^2, \\ t \geq t_{21} \end{aligned}$$

存在  $t_{2k}(\mathcal{B}) > 0, k = 0, 1, 2, \dots$  使得

$$\begin{aligned} \|w_x^k\|^2 \leq \left[ \frac{48\pi\rho_0^4}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]} \right]^k \|w_x^0\|^2, \\ t \geq t_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

若要使  $\|w_x^k\|^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , 则需要取  $N_1$  为使

$$\frac{48\pi\rho_0^4}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]} < 1 \quad (23)$$

成立的最小自然数, 故定理 2 得证。

定理 1, 2 证明了渐近解序列对真正解的渐近逼近性, 从而得到以下定理 3。

**定理 3** 设  $u^k(x, t)$  为系统 (9), (10) 的解, 则

$$\mathcal{A}^k = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{\substack{t \in \mathcal{B} \\ u_0^k \in \mathcal{B}}} u^k(x, t)$$

是系统 (3) - (6) 的渐近吸引子, 且其维数即是渐近解序列的维数为满足条件 (17), (19), (23) 的最小自然数, 即

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{A}} = \min\{N \in \mathbf{N}: \frac{8\sqrt{2}\rho_0^3}{E(N+1)} < 1, \\ \frac{8\sqrt{2}\rho_0^3}{(E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1])^{\frac{1}{2}}} \leq \rho_1, \\ \frac{48\pi\rho_0^4}{E(N+1)[\alpha(N+1)^2 - 1]} < 1\}. \end{aligned}$$

参考文献:

[ 1 ] FOIAS C, SELL G R, TEMAM R. Vanites inertills des equations differentielles dissipatives[ J] . C R Acad Sci Paris Ser 1, 1985, 301: 139— 142.

[ 2 ] TEMAM R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics[ M] . 2nd. New York: Springer-Verlag, 1997.

[ 3 ] FOIAS C, MANLEY O, TEMAM R. Sur l' interaction des petits et grands tourbillon dans des ecoulements turbulents [ J] . C R Acad Sci Paris Ser 1, 1987, 305: 497— 500.

[ 4 ] 戴正德, 郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[ M] . 北京: 科学出版社, 2000.

[ 5 ] 王冠香, 刘曾荣. Kuramoto-Sivashinsky 方程的渐近吸引子 [ J] . 应用数学学报, 2000, 23( 3) : 329— 336.

[ 6 ] BABIN A V, VISHIK M I. Attractors or evolution equations [ M] . Moscow: Nauka, 1989.

[ 7 ] BARTUCCELLM V, GOURLEY S A, ILYIN A A. Positivity and the attractor dimension in a fourth order reaction diffusion equation[ J] . Proc R Soc Lond, 2002, 458: 1431— 1446.

[ 8 ] WANG G. On the dynamics of Kuramoto-Sivaskinsky equation[ D] . Suzhou: Suzhou University, 1996.

Asymptotic Attractor of Fourth order Reaction diffusion Equation

KUANG Xue song

( Department of Basic Courses, Zhanjiang Ocean University, Guangdong, Zhanjiang 524088, China)

**Abstract:** This article studies the asymptotic attractor of fourth order reaction diffusion equation  $u_t + \alpha u_x^4 + u_x^2 + u^3 - u = 0$  by constructing a solution sequence. It is shown that the solution sequence doesn't go away from the global attractor in terms of mathematical induction. Then it is obtained that the solution sequence approaches to the global attractor of the equation in large time, and the dimensional estimate of the asymptotic attractor is obtained.

**Key words:** fourth order reaction diffusion equation; solution sequence; asymptotic attractor

( 上接第 10 页)

Distributed SAT Solving Based on EDLM Method

TANG Yi

( Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou, 510275, China //  
Department of Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou, 510405, China)

**Abstract:** Distributed CSP solving is an active research field in artificial intelligence. Based on the method of extended discrete Lagrange multiplier ( EDLM) , a method for distributed SAT solving is proposed. During the SAT solving, each agent will determine its local behavior on some predefined EDLM rules. Although the behaviors are local, the agents can be corporately organized and aggregated to a coherent behavior to a solution. The Lagrange multipliers provide a more global level for agents to consider the SAT solving. Simulated experiments on some 3 SAT benchmark problems are conducted. The results show a competitive performance in solving.

**Key words:** discrete Lagrange multiplier method; distributed problem solving; SAT