

具反馈和时滞变量的 2 种群周期竞争系统周期解^{*}

翁佩萱¹, 蒋达清²

(1. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631;
2. 东北师范大学数学系, 吉林 长春 130024)

摘 要: 利用叠合度理论和 Lyapunov 泛函, 研究一个具反馈和时滞变量的 2 种群周期竞争系统正周期解的存在性和全局稳定性, 得到相应的充分条件。

关键词: 正周期解; 全局稳定性; Lotka-Volterra 竞争系统; 反馈控制

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) 06-0004-04

本文研究下述的 2 种群 Lotka-Volterra 周期竞争系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = y_i(t) \left[r_i(t) - \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t) y_j(t - \tau_{ij}(t)) - \alpha_i(t) u_i(t - \sigma_i(t)) \right] \\ \dot{u}_i(t) = -\eta_i(t) u_i(t) + a_i(t) y_i(t - \delta(t)), \\ i = 1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{ij}, \eta_i, \alpha_i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, $i, j = 1, 2$; $\tau_{ij}, \delta, \sigma_i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $i, j = 1, 2$; 上述所有函数均为 ω -周期函数。这里 u_1, u_2 是反馈控制变量, 其被引进的目的是为了改变没有反馈控制变量时系统正周期解 $p(t)$ 的位置, 假设没有反馈控制变量时原系统的正周期解 $p(t)$ 存在。关于这方面的生态意义和进一步的讨论, 参考[1-3]。

本文假设下述成立:

(H₁)

$$\tau_{ij}(t) = \tau_{ij} + k_{ij}\omega, i, j = 1, 2$$

其中

$$\tau_{ij} \in C(\mathbf{R}, [0, \omega]), j = 1, 2,$$

是 ω -周期函数, $k_{ij}, i, j = 1, 2$, 为整数, 而

$$\bar{r}_i > 0, a_{ii}^l > 0, \eta_i^l > 0, a_i^l > 0, i = 1, 2;$$

$$\bar{r}_1 > \frac{a_{12}^u}{a_{22}} \bar{r}_2, \quad \bar{r}_2 > \frac{a_{21}^u}{a_{11}} \bar{r}_1$$

(H₂)

$$\tau_{ii}(t) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$$\bar{r}_i > 0, a_{ii}^l > 0, \eta_i^l > 0, a_i^l > 0, i = 1, 2;$$

$$\bar{\tau}_1 > \frac{a_{12}^u}{a_{22}} \bar{r}_2, \quad \bar{\tau}_2 > \frac{a_{21}^u}{a_{11}} \bar{r}_1$$

这里对任何 ω -周期函数 $g(t)$, 使用下面的记号:

$$\bar{g} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega g(t) dt; \quad g^u = \max_{t \in [0, \omega]} g(t), \\ g^l = \min_{t \in [0, \omega]} g(t)$$

Shibata 和 Saito^[4] 证明了在 2 种群滞后 Lotka-Volterra 竞争系统中, 时滞可以导致“混沌”。因此, 推导出保证系统周期解 $p(t)$ 存在和全局渐近稳定的充分条件是十分重要的。本文将致力于这个工作, 使用的方法是叠合度理论和 Lyapunov 泛函。

1 正周期解的存在性

直接可以推知: 下面系统

$$u_i(t) = -\eta_i(t) u_i(t) + a_i(t) y_i(t - \delta(t)), \\ i = 1, 2$$

的任一 ω -周期解满足

$$u_i(t) = \int_t^{t+\omega} G_i(t, s) a_i(s) y_i(s - \delta(s)) ds \\ =: (\Phi_i y_i)(t), i = 1, 2 \quad (2)$$

其中,

$$G_i(t, s) = \frac{\exp\{\int_t^s \eta_i(r) dr\}}{\exp\{\int_0^\omega \eta_i(r) dr\} - 1}, i = 1, 2;$$

反之亦然, 令

$$y_i(t) = \exp\{x_i(t)\}, i = 1, 2,$$

研究系统 (1) 的 ω -周期解将等价于研究

$$x_i(t) = r_i(t) - \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t) \exp\{x_j(t - \tau_{ij}(t))\} - \\ \alpha_i(t) (\Phi_i \exp\{x_i\})(t - \sigma_i(t)), \\ =: f_i(t, x_1(t), x_2(t)), i = 1, 2; \quad (3)$$

* 收稿日期: 2003-02-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871012); 广东省自然科学基金资助项目 (011471)

作者简介: 翁佩萱 (1951 年生), 女, 博士, 教授, 博士生导师; E-mail: wengpx@scnu.edu.cn

的 ω -周期解。如果方程 (3) 有正的 ω -周期解

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

则

$$\{y_1(t), y_2(t), u_1(t), u_2(t)\}$$

是方程 (1) 的正 ω -周期解, 其中

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))$$

由 (2) 决定。下面仅需讨论方程 (3) 正 ω -周期解的存在性。

下面的概念来自文 [5]。令 X, Z 是范数向量空间, I 是恒等映射, $L: \text{Dom} L \subset X \rightarrow Z$ 是线性映射, $N: X \rightarrow Z$ 是连续映射。映射 L 称为零指标的 Fredholm 映射, 如果 $\dim \text{Ker} L = \text{codim Im} L < +\infty$ 且 $\text{Im} L$ 在 Z 中是闭的。如果 L 是零指标的 Fredholm 映射, 一定存在连续投影算子 $P: X \rightarrow Z$ 和 $Q: Z \rightarrow Z$ 使得 $\text{Ker} L = \text{Im} P, \text{Ker} Q = \text{Im} L$, 且有 $L|_{\text{Dom} L \cap \text{Ker} P}: \text{Dom} L \cap \text{Ker} P \rightarrow \text{Im} L$ 是可逆的。我们把这个广义逆算子表示为 K_P 。假设 Ω 是 X 的一个开有界子集, 映射 N 被称为在 Ω 上 L -紧, 如果 $QN(\Omega)$ 有界且

$$K_P(I - Q)N: \Omega \rightarrow X$$

是紧的, 因为 $\text{Im} Q$ 与 $\text{Ker} L$ 同构, 所以存在同构算子 $J: \text{Im} Q \rightarrow \text{Ker} L$ 。

令 $f = (f_1, f_2)$, 则方程 (3) 等价于:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_1(t), x_2(t)) \tag{4}$$

定义下述的 Banach 空间, 范数和映射:

$$X = Z = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \mid$$

$$x(t) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2), x(t + \omega) = x(t)\},$$

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^2 \left(\max_{t \in [0, \omega]} |x_i(t)| \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$x \in X(\text{or } Z),$$

$$N: X \rightarrow Z, (Nx)(t) =$$

$$((Nx)(t), (N_2x)(t)) = f(t, x_1(t), x_2(t)),$$

$$L: \text{Dom} L \rightarrow Z, (Lx)(t) = x(t),$$

其中, $\text{Dom} L = \{x \in X \mid x(t) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上存在连续}\}$ 。注意方程 (4) 可以写成:

$$Lx = Nx, \quad x \in \text{Dom} L \tag{5}$$

引理 1 对任何开有界子集 $\Omega \subseteq X$, 如上述定义的算子 L 是一个零指标的 Fredholm 映射, N 在 Ω 上 L -紧。

证明 显然, 有下面的闭子集:

$$\text{Ker} L = \{x \mid x \in X, x = h, h \in \mathbf{R}^2\} \subseteq X,$$

$$\text{Im} L = \{z \mid z \in Z, \int_0^\omega z(t) dt = 0\} \subseteq Z,$$

且 $\dim \text{Ker} L = 2 = \text{codim Im} L$ 。因此算子 L 是一个零指标的 Fredholm 映射。考虑连续投影算子:

$$Px = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t) dt, \quad x \in X,$$

$$Qx = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega z(t) dt, \quad x \in Z$$

则有: $\text{Ker} L = \text{Im} P, \text{Ker} Q = \text{Im} L$ 。进一步, 令 $L_P = L|_{\text{Dom} L \cap \text{Ker} P}$, L 的广义逆 $K_P = L_P^{-1}: \text{Im} L \rightarrow \text{Ker} P \cap \text{Dom} L$ 定义为

$$K_P(z) = \int_0^t z(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega (\omega - s) z(s) ds$$

则有 $QN = (QN_1, QN_2): X \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$(QN_i x)(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_i(t, x_1(t), x_2(t)) dt, \quad i = 1, 2$$

QN 和 $K_P(I - Q)N$ 都是连续的。使用 Arzela-Ascoli 定理, 可以证明

$$K_P(I - Q)N(\Omega)$$

在任一开有界集 $\Omega \subset X$ 中紧。又 $QN(\Omega)$ 有界, 因此 N 在 Ω 上 L -紧。注意 $\text{Im} Q = \text{Ker} L$, 因此 $\text{Im} Q$ 与 $\text{Ker} L$ 之间的同构算子 J 是恒等算子 I 。

定理 1 假设 (H_1) (或 (H_2)) 成立, 则方程组 (3) 有至少一个 ω -周期解

$$x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t)),$$

即系统 (1) 有至少一个正 ω -周期解

$$\{y_1^*(t), y_2^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)\}$$

证明 仅以满足 (H_1) 的情形进行证明。考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx, \quad \lambda \in (0, 1) \tag{6}$$

假设 $x = x(t) \in X$ 是方程 (6) 的一个 ω -周期解, 对某一 $\lambda \in (0, 1)$ 。在区间 $[0, \omega]$ 上积分 (6) 式得到:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i \omega &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\omega a_{ij}(t) \exp\{x_j(t - \tau_j(t))\} dt + \\ &\int_0^\omega \alpha_i(t) (\Phi_i \exp\{x_i\})(t - \sigma_i(t)) dt, \\ &i = 1, 2 \end{aligned} \tag{7}$$

(6) 和 (7) 式推出:

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |x_i(t)| dt &\leq \bar{r}_i \omega + \\ \int_0^\omega |r_i(t)| dt &=: C_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式引出

$$\int_0^\omega \exp\{x_i(t - \tau_i(t))\} dt \leq \frac{\bar{r}_i \omega}{d_{ii}}, \quad i = 1, 2 \tag{9}$$

进一步从 (9) 式推知: 存在 $t_i \in [0, \omega]$ 和 $M_i > 0$ 使得

$$x_i(t_i - \tau_i(t_i)) \leq M_i, \quad i = 1, 2$$

选择 $\zeta_i \in [0, \omega]$ 和整数 m_i 使得

$$t_i - \tau_i(t_i) = \zeta_i + m_i \omega, \quad i = 1, 2$$

利用 $x_i(t)$, $i = 1, 2$ 的周期性和上面两式可知:

$$x_i(\zeta_i) \leq M_i, \quad i = 1, 2 \tag{10}$$

另一方面, 可从 (7) 式推出:

$$\bar{r}_2 \omega \leq \sum_{j=1}^2 a_{2j}^u \int_0^\omega \exp\{x_j(t - \tau_j(t))\} dt + \\ \alpha_2^u \max_{t \in [0, \omega]} \{\exp\{x_2(t)\}\} \int_0^\omega (\Phi_2 1)(t - \sigma_2(t)) dt$$

其中,

$$(\Phi_2 1)(t) \leq \frac{a_2^u}{\eta_2} \int_t^{t+\omega} G_2(t, s) \eta_2(s) ds = \frac{a_2^u}{\eta_2}$$

联合上面两式和 (9) 式, 有:

$$\max_{t \in [0, \omega]} \{\exp\{x_2(t)\}\} \geq \left\{ \bar{r}_2 - \frac{a_{21}^u}{a_{11}} \bar{r}_1 \right\} \left\{ a_{22}^u + \frac{a_2^u}{\eta_2} \right\}$$

类似地有:

$$\max_{t \in [0, \omega]} \{\exp\{x_1(t)\}\} \geq \left\{ \bar{r}_1 - \frac{a_{12}^u}{a_{22}} \bar{r}_2 \right\} \left\{ a_{11}^u + \frac{a_1^u}{\eta_1} \right\}$$

由上述两式推知: 存在 $\theta_i \in [0, \omega]$ 和 $M_i > 0$ 使得

$$x_i(\theta_i) \geq -M_i, i = 1, 2$$

联合上式和 (8), (10) 式可以知道:

$$x_i(t) \leq x_i(\zeta_i) + \int_0^\omega |x_i| dt < M_i + C_i, i = 1, 2 \\ x_i(t) \geq x_i(\theta_i) - \int_0^\omega |x_i| dt > -M_i - C_i, i = 1, 2$$

从而存在 $H_i > 0, i = 1, 2$ 使得

$$|x_i(t)| \geq H_i, i = 1, 2,$$

显然 $H_i, i = 1, 2$, 与 λ 无关. 定义 $H = \left(\sum_{i=1}^2 H_i^2 \right)^{1/2}$, 则有 $\|x\| < H$.

注意 (H₁) 保证代数方程组

$$\sum_{j=1}^2 \bar{a}_{ij} \exp\{v_j\} + T_i \exp\{v_i\} = \bar{r}_i, i = 1, 2 \quad (11)$$

有惟一解 $(v_1^*, v_2^*) \in \mathbf{R}^2$, 这里

$$T_i := \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \alpha_i(t) (\Phi_i 1)(t - \sigma_i(t)) dt, i = 1, 2$$

令

$$\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in X \mid \|x\| < H\}$$

则 Ω 满足 [5, P40] 中连续性定理的第 1 个条件. 当 $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L = \partial\Omega \cap \mathbf{R}^2$, x 是 $\mathbf{R}^2$ 中满足 $\|x\| = H$ 的常数向量. 因为

$$QN_i x = \bar{r}_i - \sum_{j=1}^2 \bar{a}_{ij} \exp\{x_j\} - T_i \exp\{x_i\} \\ i = 1, 2 \quad (12)$$

利用式 (11), (12), 可以选择充分大的 H 使得 $QNx \neq 0$. 进一步, 可有

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \text{Ker} L, 0\} \neq 0$$

到此为止, 已经证明了 Ω 满足 [5, p40] 连续性定理

的所有条件, 因此, 方程 $Lx = Nx$ 在 $\text{Dom} L \cap \Omega$ 中至少有一个解, 即系统 (3) 在 Ω 中至少有一个 ω -周期解 $x^*(t)$. 令

$$y_i^*(t) = \exp\{x_i^*(t)\}$$

由条件 (2) 知道

$$\{y_1^*(t), y_2^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)\}$$

是系统 (1) 的正 ω -周期解. 定理证毕.

2 全局渐近稳定性

本节讨论上节中的正 ω -周期解的全局渐近稳定性. 显然地, 如果

$$\{y^*(t), u^*(t)\}$$

是全局渐近稳定的, 则它是惟一的. 下面再假设

$$\tau_{ij}(t) \equiv \tau_{ij}, \tau_{ii} = 0, \\ \alpha_i(t) \equiv \alpha_i, \hat{q}(t) \equiv \hat{q} \quad (13)$$

$i, j = 1, 2$ 是非负常数.

与方程 (1) 一起, 本文总是考虑初值条件

$$y_i(s) = \varphi_i(s), s \in [-\bar{\tau}_i, 0], \varphi_i(0) > 0; \\ u_i(s) = \mu_i(s), s \in [-\sigma_i, 0], \mu_i(0) > 0 \quad (14)$$

其中, $i = 1, 2, \bar{\tau}_i = \max_n \{\tau_{ij}, \hat{q}\}$, $\varphi(t)$ 和 $\mu_i(t)$, $i = 1, 2$ 都是分别定义在 $[-\bar{\tau}_i, 0]$ 或 $[-\sigma_i, 0]$ 的非负连续函数. 容易证明方程 (1) 和 (14) 的解在 $[0, +\infty)$ 上存在且非负. 类似的证明可参考文 [2, 3]. 以下仅考虑方程 (1) 和 (14) 的非负解.

定理 2 假设条件 (13) 和定理 1 的条件被满足. 进一步假设:

$$a_{11}^l > a_{21}^u + a_{11}^u, a_{22}^l > a_{12}^u + a_{22}^u, \\ \eta_i^l > \alpha_i^u, i = 1, 2 \quad (15)$$

则系统 (1) 有惟一正的 ω -周期解 $\{y^*(t), u^*(t)\}$, 且此解是全局渐近稳定的.

证明 由定理 1, 方程 (1) 存在正的 ω -周期解 $\{y^*(t), u^*(t)\}$. 注意由式 (15), 可以找到正数 m 使得

$$a_{11}^l > a_{21}^u + a_{11}^u + m, a_{22}^l > a_{12}^u + a_{22}^u + m, \\ \eta_i^l > \alpha_i^u + m, i = 1, 2$$

定义 Lyapunov 泛函

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 [|\ln(y_i(t)) - \ln(y_i^*(t))| + \\ |u_i(t) - u_i^*(t)|] + \\ a_{21}^u \int_{t-\tau_{21}}^t |y_1(s) - y_1^*(s)| ds + \\ a_{12}^u \int_{t-\tau_{12}}^t |y_2(s) - y_2^*(s)| ds + \\ \sum_{i=1}^2 a_i^u \int_{t-\hat{q}}^t |y_i(s) - y_i^*(s)| ds +$$

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i^u \int_{t-\sigma_i}^t |u_i(s) - u_i^*(s)| ds, \quad t \geq 0$$

$V(t)$ 沿着方程(1) 的解的右上导数 $D^+ V$ 满足

$$D^+ V(t) \leq -m \sum_{i=1}^n (|y_i(t) - y_i^*(t)| + |u_i(t) - u_i^*(t)|) \tag{16}$$

所以有

$$V(t) \leq V(0) < +\infty, \quad t \geq 0,$$

且 $V(t)$ 非增对 $t \geq 0$. 进一步, 令

$$y^u = \max\{y_i(t), y_i^*(t) : 1 \leq i \leq 2, t \geq 0\},$$
$$y^l = \min\{y_i(t), y_i^*(t) : 1 \leq i \leq 2, t \geq 0\},$$

利用积分中值定理可得

$$V(t) \geq \sum_{i=1}^n (|y_i(t) - y_i^*(t)| y^u + |u_i(t) - u_i^*(t)|), \quad t \geq 0$$

综合上述结果, 可以知道 $\{y^*(t), u^*(t)\}$ 是稳定的。

又由条件 (16) 有

$$V(t) + m \sum_{i=1}^2 \int_0^t (|y_i(s) - y_i^*(s)| + |u_i(s) - u_i^*(s)|) ds \leq V(0), \quad t \geq 0$$

因为 $\{y^*(t), u^*(t)\}$ 和 $\{y(t), u(t)\}$ 当 $t \geq 0$ 时有界且有有界导数, 所以 $|y_i(t) - y_i^*(t)|, i = 1, 2$ 在

区间 $[0, \infty)$ 上一致连续。由 Barbălat 引理^[6] 得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - y_i^*(t)| = 0,$$
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_i(t) - u_i^*(t)| = 0, \quad i = 1, 2.$$

参考文献:

[1] GOPALSAMY K, WENG P X. Feedback regulation of logistic growth [J] . Internat J Math & Math Sci, 1993, 16: 177—192.

[2] WENG P X. Global attractivity in a competition system with feedback control and time delay //DENG Z Q, LIANG Z J, LU G, et al. Lecture notes in pure and applied mathematics [M] . Series 176, New York: Marcel Deker Inc. , 1995: 383—388.

[3] WENG P X. Global attractivity in a periodic competition system with feedback controls[J] . Acta Appl Math, English Series, 1996, 12(1) : 11—21.

[4] SHIBATA A, SAITO N. Time delays and chaos in two competition systems[J] . Math Biosci, 1980, 51: 199—211.

[5] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M] . Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[6] BARBĂLAT I. Systemes d'equations differentielle d'oscillations nonlineaires[J] . Rev Roumaine Math Pures Appl, 1959, 4: 267—270.

Positive Periodic Solutions of 2-Species Periodic Competition System
with Feedback Control and Deviating Arguments

WENG Pei xuan¹, JIANG Da qing²

(1. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China;
2. Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

Abstract: The existence and global stability of positive periodic solutions of 2-species periodic Lotka-Volterra competition system with feedback control and several deviating arguments are investigated by using the method of coincidence degree and Lyapunov functional. Some sufficient conditions are obtained.

Key words: positive periodic solutions; global stability; Lotka-Volterra competition system; feedback control