

一类广义复演化方程的吸引子*

李栋龙¹, 高平²

(1. 广西工学院信息与计算科学系, 广西 柳州 545006;

2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 研究在周期边界条件下的复 Ginzburg-Landau 方程 (GGL), 在关于非线性项的 σ 的适当条件下, 应用先验估计的方法, 证明复 Ginzburg-Landau 方程整体吸引子的存在性。

关键词: 复 Ginzburg-Landau 方程; 先验估计; 吸引子

中图分类号: O175.29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 01-0008-04

1 研究背景

复 Ginzburg-Landau (GGL) 方程由如下形式给出

$$u_t = \rho u + (1 + i\nu)u_{xx} - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u$$

Doering 等^[1] Ghidaglia 等^[2] 在一维和二维空间中研究了带立方非线性项 ($\sigma = 1$) 的 Ginzburg-Landau 方程有限维吸引子及相关动力系统。Constantin 等^[3] 研究了这个方程“软”的和“硬”的湍流行为。Doering 等^[4] 考察了带任意阶数非线性项 $\sigma > 0$ 的复 Ginzburg-Landau 方程在所有空间的强解及弱解的存在性和惟一性。

本文研究如下复 Ginzburg-Landau 方程

$$u_t = \rho u - \Delta \varphi(u) - (1 + i\gamma)\Delta u - \nu \Delta^2 u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha \gamma_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\gamma_2 \cdot \nabla)|u|^2$$

对于 $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ (1)

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u \in \Omega = (-L, L) \times (-L, L) \in \mathbf{R}^2;$$

$$u \text{ 是 } \Omega - \text{周期的} \quad (2)$$

其中, $u(x, t)$ 是未知复值函数, Δ 是拉普拉斯算子, $\rho > 0, \gamma, \mu, \nu, \mu$ 是实参数。

本文主要结果是通过先验估计, 证明复 Ginzburg-Landau 方程(1), (2)最大吸引子的存在性。

为简单起见, 记 $H^k = H_{\text{per}}^k(\Omega)$ 为 Sobolev 空间, 范数为

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|s| \leq k} \|D^s u\|_H^2 \right)^{1/2}, H = L_{\text{per}}^2(\Omega)$$

其范数为 $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|$, 内积为 $(\cdot, \cdot)$, 而对于

$1 \leq p \leq \infty (\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|), \|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 范数。

2 解的存在性和惟一性

首先讨论初边值问题(1), (2)局部的存在性, 在 H 定义线性算子 $Au = -\nu \Delta^2 u$, 其定义域 $D(A) = H^4 \cap H_0^2$ 。由 Lumer-Phillips 定理, A 是收缩连续半群 $S(t) = \exp At (t > 0)$ ([5, 6]) 的无穷小生成元。令

$$N(u) = \rho u - (1 + i\gamma)\Delta u - \Delta \varphi(u) - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla)|u|^2$$

方程(1)可改写为

$$u_t = Au + N(u)$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 可证明, 对于 $u_0 \in H^2$, 非线性映照 $N(u)$ 映 H^2 到 H , 且对于 $u, v \in H^2$, 满足

$$\|N(u)\| \leq C \|u\|_{H^2}$$

$$\|N(u) - N(v)\| \leq$$

$$C(\|u\|_{H^2}, \|v\|_{H^2}) \|u - v\|_{H^2}$$

引理 1 对于每一 $u_0 \in H^2$, 初边值问题(1),

(2) 存在惟一解, 使得, 对于 $t \in [0, T_{\max})$, 有

$$u \in C^1((0, T_{\max}); H^2) \cap C([0, T_{\max}); H^2)$$

且有要么 $T_{\max} = \infty$, 或者, 如果 $T_{\max} < \infty$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^2} \rightarrow \infty.$$

证明 引理的结果来自文[5]的[定理 3.3.3], [定理 3.3.4] 和 [定理 3.5.2] 以及文[6]的[定理 6.3.1]。

* 收稿日期: 2003-03-12

基金项目: 广西工学院科学研究基金资助项目 (030106)

作者简介: 李栋龙 (1964 年生), 男, 副教授, 博士; E-mail: lidl@21cn.com

为证明整体解的存在性,将在相空间 H, H^1 和 H^2 中导出 $u(t)$ 的先验估计。

引理 2 假设 $u_0 \in H, \varphi'(u) \leq 0$ 。那么,问题 (1), (2) 的解 $u(t)$, 有

$$\|u\|^2 \leq K_1(R, T_1) \quad t \in [0, T_1]$$

其中, $K_1(R, T_1)$ 依赖于初值和 R, T_1 , 且当 $\|u_0\| \leq R$ 时, T_1 依赖于初值和 R 。

证明 方程 (1) 与 u 作内积, 取实部, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = \rho \int |u|^2 + \|\nabla u\|^2 -$$

$$\nu \|\Delta u\|^2 - (\Delta \varphi(u), u) - \int |u|^{2\sigma+2} +$$

$\operatorname{Re}(u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2)$
显然有

$$\operatorname{Re}((u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2) = 0$$

同时可得

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi(u), u) &= -(\nabla \varphi(u), \nabla u) = \\ &= -(\varphi'(u) \nabla u, \nabla u) = -(\varphi'(u), \|\nabla u\|^2) \geq 0, \\ \|\nabla u\|^2 &= -(\Delta u, u) \leq \|\Delta u\| \|u\| \leq \\ &\frac{\nu}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|u\|^2 \end{aligned}$$

和

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{2k} \int |u|^{2\sigma+2} + c$$

综合上面不等式, 且应用 Gronwall 不等式证明了引理 1。其中, C, c 表示依赖于初值 $\sigma, \rho, \nu, \mu, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ 的任意常数。

引理 3 假设引理 2 的条件成立, $\sigma < 2$ 及

$$|\varphi'(u)| \leq C |u|^p, \quad 0 \leq p < 2$$

那么, 问题 (1), (2) 的解 $u(t)$, 有

$$\|\nabla u\|^2 \leq K_2(R, T_2), \quad t \in [0, T_2]$$

其中, $K_2(R, T_2)$ 依赖于初值和 R, T_2 , 且当 $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ 时, T_2 依赖于初值和 R 。

证明 用 Δu 乘方程 (1), 并关于 x 在 Ω 积分, 然后取实部, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 &= \\ \rho \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \nu \|\nabla \Delta u\|^2 + \\ (\Delta \varphi(u), \Delta u) + \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int |u|^{2\sigma} u \Delta \bar{u} + \\ \operatorname{Re}(\Delta u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)) + \\ \operatorname{Re}(\Delta u, \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2) \end{aligned} \quad (3)$$

首先, 有

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi(u), \Delta u) &= -(\nabla \varphi(u), \nabla \Delta u) = \\ &= -(\varphi'(u) \nabla u, \nabla \Delta u) \leq \\ c \|u\|_{4p}^p \|\nabla u\|_4 \|\nabla \Delta u\| \end{aligned} \quad (4)$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_r &\leq c \|\nabla \Delta u\|^{(r-2)/3r} \|u\|^{(2r+2)/3r} \\ \|\nabla u\|_r &\leq c \|\nabla \Delta u\|^{(2r-2)/3r} \|u\|^{(r+2)/3r} \end{aligned} \quad (5)$$

从而得到

$$\begin{aligned} (\Delta \varphi(u), \Delta u) &\leq \\ c \|\nabla \Delta u\|^{\frac{p+4}{3}} \|u\|^{\frac{2p+2}{3}} &(\text{因为 } 0 \leq p \leq 2) \leq \\ \frac{\nu}{10} \|\nabla \Delta u\|^2 + c &(\text{由引理 2}) \end{aligned} \quad (6)$$

对于 (3) 式右边的第 5 项, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1 + i\mu) \int |u|^{2\sigma} u \Delta \bar{u} &\leq \\ \sqrt{1 + \mu^2} \|u\|_{\frac{4\sigma+2}{4\sigma+2}}^{2\sigma+1} \|\Delta u\| &\leq \\ \sqrt{1 + \mu^2} \|\nabla \Delta u\|^{\frac{2+2\sigma}{3}} \|u\|^{\frac{4\sigma+4}{3}} &(\text{因为 } \sigma < 2) \leq \\ \frac{\nu}{10} \|\nabla \Delta u\|^2 + c(\mu, \nu) \|u\|^{2(4\sigma+4)/(2-\sigma)} \end{aligned} \quad (7)$$

对于 (3) 式右边的第 6 项, 有

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(\Delta u, \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2)| &\leq \\ |\beta_2| \|\Delta u\| \|\nabla u\|_4 \|u\|_8^2 &\leq \\ |\beta_2| \|\nabla \Delta u\|^{5/3} \|u\|^{7/3} &\leq \\ \frac{\nu}{10} \|\nabla \Delta u\|^2 + c(\nu) |\beta_2| \|u\|^{14} \end{aligned} \quad (8)$$

类似地, 由于

$$\begin{aligned} \nabla(|u|^2 u) &= |u|^2 \nabla u + \\ \nabla |u|^2 u &= 2 |u|^2 \nabla u + u^2 \nabla \bar{u} \end{aligned}$$

推得

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(\Delta u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u))| &\leq \\ \frac{\nu}{10} \|\nabla \Delta u\|^2 + c(\nu) |\alpha \lambda_1| \|u\|^{14} \end{aligned} \quad (9)$$

由引理 2 和 (5) 式中令 $r = 2$, 得

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|^2 &= (-\nabla \Delta u, \nabla u) \leq \\ \|\nabla \Delta u\| \|\nabla u\| &\leq c \|\nabla \Delta u\|^{4/3} \|u\|^{2/3} \leq \\ \frac{\nu}{10} \|\nabla \Delta u\|^2 + c \|u\|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

从 (3) - (10) 式和引理 2, 应用 Gronwall 不等式获得引理证明。

引理 4 假设引理 3 的条件成立, 且

$$|\varphi''(u)| \leq c |u|^{p-1}$$

这里 p 同引理 3, 那么对于 $u_0 \in H^2$, 问题 (1), (2) 的解 $u(t)$ 满足

$$\|\Delta u\|^2 \leq K_3(R, T_3), \quad t \in [0, T_3]$$

其中, $K_3(R, T_3)$ 依赖于初值和 R, T_3 , 且当 $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ 时, T_3 依赖于初值和 R 。

证明 方程 (1) 与 $\Delta^2 u$ 作内积, 取实部, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 &= \rho \|\Delta u\|^2 + \|\nabla \Delta u\|^2 - \\ \nu \|\Delta^2 u\|^2 + (\Delta \varphi(u), \Delta^2 u) - \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(1+i\mu) \int |u|^{2\sigma} u \Delta^2 \bar{u} + (\Delta^2 u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2) \quad (11)$$

可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1+i\mu) \int |u|^{2\sigma} u \Delta^2 \bar{u} &\leq \\ \sqrt{1+\mu^2} \|u\|_{\frac{2\sigma+1}{4\sigma+2}}^{2\sigma+1} \|\Delta^2 u\| &\leq \\ \sqrt{1+\mu^2} \|\Delta^2 u\|^{\frac{\sigma}{2}+1} \|u\|^{(3\sigma+2)/2} &(\text{因为 } \sigma < 2) \leq \\ \frac{\nu}{8} \|\Delta^2 u\|^2 + c(\mu) \|u\|^{\frac{2(3\sigma+2)}{3-\sigma}} \end{aligned} \quad (12)$$

对于 (11) 式的第 4 项, 有

$$\begin{aligned} (\Delta^2 u, \alpha \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u)) &\leq \\ 3|\alpha \lambda_1| \|\Delta^2 u\| \|u\|_8^2 \|\nabla u\|_4 &\leq \\ 3|\alpha \lambda_1| \|\Delta^2 u\|^{\frac{7}{4}} \|u\|^{\frac{9}{4}} &\leq \\ \frac{\nu}{8} \|\Delta^2 u\|^2 + 3c|\alpha \lambda_1| \|u\|^8 \end{aligned} \quad (13)$$

类似于 (13) 式, 有

$$\begin{aligned} |(\Delta^2 u, \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u) |u|^2)| &\leq \\ \frac{\nu}{8} \|\Delta^2 u\|^2 + c|\beta \lambda_2| \|u\|^8 \end{aligned} \quad (14)$$

也有

$$\begin{aligned} -(\Delta \varphi(u), \Delta^2 u) &\leq \|\Delta \varphi(u)\| \|\Delta^2 u\| \leq \\ \|\varphi''(u)(\nabla u)^2 + \varphi'(u) \Delta u\| \|\Delta^2 u\| &\leq \\ c\|u\|_{4(p-1)}^{p-1} \|\nabla u\|_8^2 \|\Delta^2 u\| + & \\ c\|u\|_{4p}^p \|\Delta u\|_4 \|\Delta^2 u\| \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} -(\Delta \varphi(u), \Delta^2 u) &\leq \\ c\|u\|_{4(p-1)}^p \|\nabla u\|_8^2 \|\Delta^2 u\| + & \\ c\|u\|_{4p}^p \|\Delta u\|_4 \|\Delta^2 u\| &\leq \\ c\|\Delta^2 u\|^{1+(2p-1)/8} \|\nabla u\|^{3/2} \|u\|^{(6p-5)/8} + & \\ c\|\Delta^2 u\|^{1+(2p-3)/8} \|\nabla u\|^{1/2} \|u\|^{(6p+1)/8} &\leq \\ c\|\Delta^2 u\|^{1+(2p-1)/8} + c\|\Delta^2 u\|^{1+(2p-3)/8} &\leq \\ \frac{\nu}{8} \|\Delta^2 u\|^2 + c(\text{因为 } p < 2) \end{aligned} \quad (15)$$

注意到

$$\begin{aligned} \|\nabla \Delta u\|^2 &= -(\Delta^2 u, \Delta u) \leq \|\Delta^2 u\| \|\Delta u\| \leq \\ \frac{\nu}{2} \|\Delta^2 u\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|\Delta u\|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

结合 (11) - (16) 式, 且应用 Gronwall 不等式, 完成引理的证明。

定理 1 (整体存在性) 假设 $\sigma < 2$ 且

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &\leq 0, |\varphi^{(k)}(u)| \leq C|u|^{p+1-k}, \\ k &= 1, 2, \quad 0 \leq p \leq 2 \end{aligned}$$

那么, 初边值问题 (1), (2) 存在整体惟一解 $u(x, t)$, 使得对于任意的 $T > 0$, $u(x, t)$ 满足

$$u \in C^1((0, T); H^2) \cap C([0, T]; H^2)$$

3 整体吸引子的存在性

由定理 1 知, 存在映 H^2 到 H^2 的动力系统 $S(t)(t \geq 0)$, 使得 $S(t)u_0 = u(t)$ 是问题 (1), (2) 的解。显然, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 具有半群性质。以下构造问题 (1), (2) 的整体吸引子。首先证明吸收集的存在性, 为此, 需要解关于时间的一致先验估计。

由引理 2 的证明, 可导出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu \|\Delta u\|^2 &\leq \\ -\left(k - \frac{1-2\nu\rho}{\nu}\right) \|u\|^2 + 2c \end{aligned}$$

选择 k 充分大, 使得 $k' = k - \frac{1+2\nu\rho}{\nu} \geq 0$, 应用 Gronwall 不等式, 得到

$$\|u\|^2 \leq \frac{4c}{k'} = \rho_1^2, \quad t \geq t_1 \quad (17)$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式, 容易得

$$2\rho \|\nabla u\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla \Delta u\|^2 + c(\nu) \|u\|^2$$

从而, 在引理 3 的证明中, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \leq -\rho \|\nabla u\|^2 + C$$

由 Gronwall 不等式, 得到

$$\|\nabla u\|^2 \leq \frac{2C}{\rho} = \rho_2^2, \quad \forall t > t_2 \quad (18)$$

又由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\nu} + 2\rho\right) \|\Delta u\|^2 &= \\ -2\left(\frac{1}{2\nu} + 2\rho\right) (\nabla \Delta u, \nabla u) &\leq \\ c\|\nabla \Delta u\| \leq c\|\Delta^2 u\|^{1/4} \|u\|^{3/4} &\leq \\ \frac{\nu}{2} \|\Delta^2 u\|^2 + c(\nu) \|u\|^2 \end{aligned}$$

从而, 在引理 4 的证明中, 推得

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 \leq -\left(\frac{1}{2\nu} + 2\rho\right) \|\Delta u\|^2 + c$$

应用 Gronwall 不等式后得

$$\|\Delta u\|^2 \leq \frac{4\nu c}{1+4\nu\rho} = \rho_3^2, \quad \forall t > t_3 \quad (19)$$

(17), (18) 和 (19) 式联合表示, 球

$$B = \{u(x, t) \mid \|u(x, t)\|_{H^2}^2 \leq \rho_1^2 + \rho_3^2\}$$

是 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的吸收集。

引理 6 假设定理 1 的条件成立, 问题 (1), (2) 的解满足

$$\|\nabla \Delta u\|^2 \leq \rho_4^2, \quad \text{对于 } t \geq t_4$$

其中, ρ_4 依赖于初值, 且当 $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ 时, t_4 依赖于初值和 R 。

由 Agmon 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 引理的证明是不困难的。

引理 6 表示动力系统 $S(t)(t \geq 0)$ 对于充分大的 t 是一致紧的。这样由文 [7] 获得整体吸引子的存在性。

定理 2 假设定理 1 的条件成立, B 的 ω 极限集

$$A = \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}$$

是 $S(t)$ 在 H^2 的最大的、紧的、连通的整体吸引子, 闭包是在 H^2 中取的。

参考文献:

- [1] DOERING C, GIBBON J D, HOLM D, et al. Low-dimensional behavior in the complex Ginzburg-Landau equation [J]. Nonlinearity, 1988(1): 279 – 309.
- [2] GHIDAGLIA J M, HÉRON B. Dimension of the attractor associated to the Ginzburg-Landau equation[J]. Phys, 1987, 28D: 282 – 304.
- [3] BARTUCCELLI M, CONSTANTIN P, DOERING C, et al. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation [J]. Physica, 1990, 44D: 421 – 444.
- [4] DOERING C R, GIBBON J D, LEVERMORE C D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Phys, 1994, 71D: 285 – 318.
- [5] HENRY D. Geometric theory of semilinear parabolic equation [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [6] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equation [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [7] TEMAM R. Infinite dimensional dynamic systems in mechanics and physics [M]. New York: Springer, 1988.

Attractor for a Class of Generalized Complex Evolution Equation

LI Dong-long¹, GAO Ping²

(1. Department of Information and Computational Science, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545006, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The generalized complex Ginzburg-Landau equation (GGL) under periodic boundary condition in $\Omega \in \mathbf{R}^2$ is studied. Under appropriate assumptions on nonlinear term σ , the existence of global attractor for this equation is established using method of prior estimation.

Key words: generalized complex; Ginzburg-Landau equation; global attractor