

两种边界控制下的线性和半线性分布参数系统的能控性^{*}

柴华金¹, 解玲丽²

(1. 湛江海洋大学理学院, 广东 湛江 524088;
2. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 根据系统分解的方法, 讨论在2种边界控制下, 通过对能控对域的研究来分析线性和半线性分布参数系统的能控性。

关键词: 能控性; 边界控制; 能控对域

中图分类号: O231.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 04-0019-04

1988年文[1]提出一种系统方法叫做HUM方法, 是用来研究在边界控制下, 线性分布参数系统能控性问题的。以后很多文章使用这种方法讨论这类问题, 本文根据文[2]所述框架提出一种新的方法来研究这类问题。

值得指出的是: 不同于HUM方法, 这种新方法可以使用特殊的技巧把线性算子生成半群的边界控制表达出来, 从而得到控制与状态的定量关系。

考虑以下系统:

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \quad (1)$$

这里, $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$, $X_i (i = 1, 2)$ 是 Hilbert 空间, A 是 X 上的线性算子, 具有以下定义域:

$$D(A) = \{(x_1, x_2): x_2 \in S_i \subset X_i, i = 1, 2\}$$

我们有以下引理^[3]。

引理1 设 $A_i (i = 1, 2)$ 分别是 X_i 上的线性算子, 且满足:

$$(1) \quad D(A_2) = S_2,$$

$$D(A_1) = \{\bar{x}_1: \bar{x}_1 = x_1 - F_{21}x_2, x_i \in S_i\}$$

其中, F_{21} 是 X_2 到 X_1 的有界线性算子;

(2) $A_i (i = 1, 2)$ 分别在 X_i 上生成 C_0 半群 $T^i(t)$;

(3) 算子 A 可分解为如下形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -F_{21} \\ O & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & F_{21}A_2 \\ O & O \end{pmatrix} \quad (2)$$

则算子 A 在 X 上生成 C_0 半群 $T(t)$, 它可表为

$$T(t)x = \begin{pmatrix} T^1(t)(x - F_{21}x_2) + F_{21}T^2(t)x_2 \\ T^2(t)x_2 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

1 主要结果

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1(t, \zeta)}{\partial t} = A_1 x_1(t, \zeta), \zeta \in \Omega \\ x_1(0, \zeta) = x_{10}(\zeta), \frac{\partial x_1(t, \xi)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = u(t, \xi) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\partial/\partial \nu$ 表示 Ω 的边界 Γ 上的外法向。

令 $x_1(t) = x_1(t, \cdot)$, $x_{10} = x_{10}(\cdot)$, $u(t) = u(t, \cdot)$, 并设 X_1 是 Ω 上的 Hilbert 空间, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, 具有充分光滑的边界 Γ , A_1 是 X_1 上的线性算子, $x_{10} \in X_1$; U 是 Γ 上的 Hilbert 空间, $u(t) \in U$, 则(4)式可写为:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = A_1 x_1(t), \\ x_1(0) = x_{10} \end{cases} \quad (5)$$

设

$$u(t) = x_2(t)g \quad (6)$$

其中, $x_2(t) \in \mathbf{R}^1$, 满足:

$$\begin{cases} \frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) = \lambda x_2(t), \\ x_2(0) = x_{20} \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

及 $g \in U$ 。令 $D(A_2) = S_2 = \mathbf{R}^1$, 记

$$S_1 = \{x_1 \in X_1: x_1 = x_2 g \text{ 在 } \Gamma \text{ 上成立}, x_2 \in \mathbf{R}^1\}$$

假设

(1) 对每个 $g \in U$, 存在惟一的解 $G \in X_1$, 满

* 收稿日期: 2004-01-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371136); 广东省自然科学基金资助项目(021765)

作者简介: 柴华金(1960年生), 男, 讲师; E-mail: Hjin_chai@tom.com

足:

$$A_0 G = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial v} \Big|_{\Gamma} = g \tag{8}$$

其中, $A_0 = A_1$. 定义算子 $F: \mathbf{R}^1 \rightarrow X_1: Fx_2 = x_2 G$, 其中, G 是(8)的解. 且 $x_2 \in \mathbf{R}^1$. 令:

$$D(A_1) = \left\{ x_1 \in X_1: x_1 = x_1 - Fx_2, \right. \\ \left. x_2 \in S_1, x_2 \in \mathbf{R}^1 \right\}$$

如果 $\lambda \in \rho(A_1) \longrightarrow A_1$ 的预解集, 那么 $\exp(\lambda t) \in \rho(T^1(t))$.

如果 A_1 可逆, 则引入以下记法:

$$C_1 = \{ (x_{10}, x_{11}) \in X_1 \times X_1: \\ A_0 F_{\lambda}(t_1) x_{10} - x_{11} = 0 \}$$

$$C_2 = \left\{ g \in U: g = \frac{\partial F_{\lambda}(t_1)(T^1(t_1)x_{10} - x_{11})}{\partial v} \Big|_{\Gamma}, \right. \\ \left. (x_{10}, x_{11}) \in C_1 \right\}$$

其中, $F_{\lambda}(t_1) = x_{20}^{-1}[\exp(\lambda t_1)I - T^1(t_1)](I - \lambda A_1^{-1})$.

定义1 称 $(x_{10}, x_{11}) \in X_1 \times X_1$ 为(5)式当控制 u 属于容许集合 U_{ad} 时在时间区间 $[0, t_1]$ 内能控对, 是指存在 $u \in U_{ad}$ 使得(5)式具有初值 x_{10} 的解 $x_1(t)$ 满足 $x_1(t_1) = x_{11}$; 并称集合 $C = \{ (x_{10}, x_{11}): (x_{10}, x_{11}) \text{ 是上述能控对} \}$ 为 $u \in U_{ad}$ 时在内的能控对域.

定义2 称 $(x_{10}, x_{11}) \in X_1 \times X_1$ 为(5)式当控制 u 属于容许集合 U_{ad} 时在无限时间内的能控对, 是指存在 $u \in U_{ad}$ 和 $t_1 < \infty$ 使得具有初值 x_{10} 的解 $x_1(t)$ 满足 $x_1(t_1) = x_{11}$; 并称集合: $C' = \{ (x_{10}, x_{11}): (x_{10}, x_{11}) \text{ 是在无限时间内的能控对} \}$ 为 $u \in U_{ad}$ 时在无限时间内的能控对域.

令:

$$U_{ad} = \{ u: u(t) = x_2(t)g, x_2(t) \text{ 是方程(7)的解} \\ \text{且 } g \in C_2, \lambda \in \rho(A_1) \text{ 且 } \lambda \neq 0 \} \tag{9}$$

注1: (9)式意味着 $u(t)$ 是关于时间的指数型控制函数.

定理1 如果假设(1)成立, A_1 是可逆的, U_{ad} 由(9)式给出, A_1 在 X_1 上生成 C_0 半群 $T^1(t)$, F 是有界的, 则在定义1的意义下, 能控对域由 $C = \bigcup_{\lambda} C_1$ 给出, $\lambda \in \rho(A)$ 且 $\lambda \neq 0$.

证明 很明显, 假设(1)成立时, 方程(5)~(7)可以耦合为:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \Phi x(t), x(0) = x_0$$

这里, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F \\ O & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & FA_2 \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} O & -FA_2 \\ O & O \end{bmatrix}$$

由引理1和(3)式得:

$$x_1(t) = T^1(t)(x_{10} - Fx_{20}) + FT^2(t)x_{20} + \\ \int_0^t T^1(t-s)(-FA_2T^2(s)x_{20})ds = \\ T^1(t)x_{10} + x_{20}[\exp(\lambda t)I - T^1(t)]G - \\ \lambda x_{20} \int_{t_0}^t \exp(\lambda s)T^1(t-s)Gds \tag{10}$$

根据半群的性质, 有:

$$(A_1 - \lambda I) \int_0^t \exp(-\lambda s)T^1(s)Gds = \\ [\exp(-\lambda t)T^1(t) - I]G$$

使得:

$$\int_0^t \exp(\lambda s)T^1(t-s)Gds = \\ \exp(\lambda t) \int_0^t \exp(\lambda s)T^1(s)Gds = \\ (\lambda I - A_1)^{-1}[\exp(\lambda t)I - T^1(t)]G \tag{11}$$

因为 $\lambda \in \rho(A)$ 且 $\lambda \neq 0$, 及 $I - \lambda((\lambda I - A_1)^{-1}) = -A_1(\lambda I - A_1)^{-1}$, 故, 由(10), (11)式及 $F_{\lambda}^{-1}(t_1)$ 的定义, 可推得:

$$x_1(t_1) - T^1(t_1)x_{10} = \\ -x_{20}A_1(\lambda I - A_1)^{-1}[\exp(\lambda t_1)I - T^1(t_1)]G = \\ -F_{\lambda}^{-1}(t_1)G \tag{12}$$

对任何给定的 $(x_{10}, x_{11}) \in C$, 令

$$g = \frac{\partial F_{\lambda}(t_1)(T^1(t_1)x_{10} - x_{11})}{\partial v} \Big|_{\Gamma}$$

由 C_2 的定义知道 $g \in C_2$ 及

$$G = F_{\lambda}(t_1)(T^1(t_1)x_{10} - x_{11}) \tag{13}$$

满足假设(1), 进而, 由(12)和(13)式得到 $x_1(t_1) = x_{11}$, 即 (x_{10}, x_{11}) 是能控对. 证毕.

注2: 这个方法的优点在于得到了状态和控制的定量关系, 可以用

$$u(t) = x_2(t)g, \\ g = \frac{\partial F_{\lambda}(t_1)(T^1(t_1)x_{10} - x_{11})}{\partial v} \Big|_{\Gamma}$$

明确表示出来.

自然地, 进一步的讨论在于扩大控制函数的类型范围, 使控制函数不止局限于关于时间是指数型的.

令:

$$u(t) = h(t)g, \\ h(t) = c_0 + c_1(t) + \dots + c_nt^n = \langle x_2(t), c \rangle_{\mathbf{R}^{n+1}}, \\ x_2(t) = (1, t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbf{R}^{n+1}, \\ c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} &= A_2 x_2(t), \\ x_{20} &= (1, 0 \cdots, 0) \in \mathbf{R}^{n+1} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 &= (1, 0 \cdots, 0) \\ Fx_2 &= \langle x_2, c \rangle G, \quad \forall x_2 \in \mathbf{R}^{n+1} \end{aligned} \tag{14}$$

设 A_1 是可逆的, 并引入以下记号:

$$\begin{aligned} K_i(t)G &= \sum_{j=0}^i B_i^j A_1^{-j} (t^{i-j} I - T^1(t)) G, \\ i &= 0, 1, \cdots, n. \\ B_i^j &= i(i-1) \cdots (i-j+1), \\ K_c(t)G &= \sum_{i=0}^n c K_i(t)G \end{aligned}$$

对某个 $t_1 \in \mathbf{R}^1$, 令 $K_c(t_1)$ 是可逆的, 且

$$\begin{aligned} C'_1 &= \{(x_{10}, x_{11}) \in X_1 \times X_1: \\ A_0 K_c(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10}) &= 0\} \\ C'_2 &= \\ \left\{ g \in U: g = \frac{dK_c^{-1}(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10})}{d\nu} \right\}_{\Gamma}, \\ (x_{10}, x_{11}) &\in C'_1 \\ U_{ad} &= \{u: u(t) = \langle x_2(t), c \rangle g, \\ x_2(t) \text{ 是方程(14)的解且 } g \in C'_2\} \end{aligned} \tag{15}$$

定理 2 如果假设(1)成立, $k_c(t_1)$ 是可逆的, U_{ad} 由(15)式给出, A_1 在 X_1 上生成可微半群 $T^1(t)$, F 是有界的. 则在定义 1 的意义下, 能控对域由 $C = \bigcup_{C \in \mathbf{R}^{n+1}} C_1$ 给出.

此定理的证明与定理 1 类似. 只需注意到:

$$\begin{aligned} x_1(t) - T^1(t)x_{10} &= \int_0^t h(S)dT^1(t-S)G, \\ \int_0^t S^i dT^1(t-S)G &= K_i(t)G, \quad i = 0, 1, \cdots, n \end{aligned}$$

注 3: 定理 2 考虑的是关于时间的多项式函数 $h(t)$ 的控制. 这种函数很重要, 因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它可以在 $L^2(0, t_1)$ 空间上近似任何函数.

注 4: 类似地也可以讨论能控对域, 而且定理 1 和定理 2 可以被应用到 $x_1(t, \zeta)|_{\Gamma} = u(t, \zeta)$ 这种情形上, 此时条件(8)和 C_2 或 C'_2 也相应地有所改变.

令:

$$\begin{aligned} y &= F_{\lambda}(t_1)(x_{11}), \\ f &= A_0 F_{\lambda}(t_1) T^1(t_1) x_{10} \end{aligned}$$

从 C_1, C_2, C 及 $F_{\lambda}(t_1)$ 的定义和定理 1 的证明, 我们

知道:

对任何给定的 x_{10} , 由 $u(t) = x_2(t)g, g \in U$ 所得到的能控对域是:

$$\begin{aligned} C_{10} &= \{x_{11} \in X_1: x_{11} = F_{\lambda}^{-1}(t_1)y, A_0 y = f, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} &= g - \frac{\partial F_{\lambda}(t_1) T^1(t_1) x_{10}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}, \\ \forall g \in U, \lambda \in \rho(A_1) \text{ 且 } \lambda &\neq 0\} \end{aligned}$$

由以上可得到如下结果.

推论 1 在定理 1 的假设下, 若 $C_{10} = X_1$ 或 C_{10} 在 X_1 中稠密, 则系统(4)精确能控或近似能控. 类似地, 令:

$$\begin{aligned} y &= K_c^{-1}(t_1)(x_{11}), \\ f &= A_0 K_c^{-1}(t_1) T^1(t_1)(x_{10}) \\ C'_{10} &= \{x_{11} \in X_1, \\ x_{11} &= K_c(t_1)y, A_0 y = f, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} &= g - \frac{\partial K_c^{-1}(t_1) T^1(t_1) x_{10}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}, \quad \forall g \in U\} \\ S &= \{\bigcup_c C'_{10}, C \in \mathbf{R}^{n+1}, \forall n\}, \\ S' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\bigcup_c C'_{10}, C \in \mathbf{R}^{n+1}\} \end{aligned}$$

还可以得到以下推论 2.

推论 2 在定理 2 的假设下, 若 $S = X_1$ 或 S 在 X_2 中稠密, 则系统(4)精确能控或近似能控.

注 5: 沿着这个研究框架可以把引理(1)中的 $i = 2$ 拓广到 $i = n$ 的情形.

2 在边界控制下半线性系统的能控性

在边界控制(15)下, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t, \zeta)}{dt} = A_1 x_1(t, \zeta) + N(x_1(t, \zeta)), \\ x_1(0, \zeta) = x_{10}(\zeta), \frac{dx_1(t, \zeta)}{d\nu} \Big|_{\Gamma} = u(t, \zeta) \end{cases} \tag{16}$$

设在第 1 部分中基本假设和记号成立.

令 $N(x_1(t)) = N(x_1(t, \cdot))$, 系统(16)可写为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + N(x_1(t)), \\ x_1(0) = x_{10} \end{cases} \tag{17}$$

在第 1 部分假设(1)基础上进一步假设:

(2) 在式(15)的前提下, 式(17)所对应的线性系统对任何初始时间 $t_0 > 0, (t_0 < t_1)$ 是近似能控的.

(3) 非线性映射 $N: X_1 \rightarrow X_1$ 满足:

$$\begin{aligned} \|N(x_{11}) - N(x_{12})\| &\leq K \|x_{11} - x_{12}\|, \\ \forall x_{11}, x_{12} &\in X_1 \end{aligned}$$

其中, 常数 K 独立于 x_{11}, x_{12} .

定理3 在定理2及假设(2)和假设(3)下,当 $u \in L^2(0, t_1; U)$ 时,系统(17)是近似能控的,其中 u 是多项式型。

证明 由引理1得:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= T^1(t)(x_{10} - Fx_{20}) + FT^2(t)x_{20} + \\ &\int_0^t T^1(t-s)(-FA_2T^2(s)x_{20})ds + \\ &\int_0^t T^1(t-s)N(x_1(s))ds = x_1(t, x_{10}, u), \\ &t \in [0, t_1] \end{aligned} \tag{18}$$

令 $y(t)$ 是系统(17)的相应线性系统的解,

$$\begin{aligned} y(t) &= T^1(t)(x_{10} - Fx_{20}) + FT^2(t)x_{20} + \\ &\int_0^t T^1(t-s)(-FA_2T^2(s)x_{20})ds = y(t, t_0, y_0, u) \end{aligned} \tag{19}$$

其中, $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1$, 令 $\tau_n = (1 - 2^{-n})t_1$ 而且 $\|T^1(t)\| \leq M(t \in [0, t_1])$ 。

由假设(2)知道,对任意给定的 $x_{11} \in X_1$ 和 $\epsilon > 0$, 存在 $v_0 \in U_{ad}$ (由(15)式给出)使得:

$$\|y(t_1, t_0, x_{10}, v_0) - x_{11}\| < \frac{\epsilon}{2\exp(MKt_1)}$$

且令 $z_1 = x_1(\tau_1, x_{10}, v_0)$ 。

再由假设(2)知道,对 $z_1 \in X_1$ 和 $\epsilon > 0$, 存在 $v_1 \in U_{ad}$ (由(15)给出)使得:

$$\|y(t_1, \tau_1, z_1, v_1) - x_{11}\| < \frac{\epsilon}{2\exp(MKt_1)}$$

并令 $z_2 = x_1(\tau_2, x_{10}, u_1)$, 其中

$$u_1(t) = \begin{cases} v_0(t) & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ v_1(t) & \tau_1 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

重复以上步骤, 得到

$$\|y(t_1, \tau_n, z_n, v_n) - x_{11}\| < \frac{\epsilon}{2\exp(MKt_1)},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

其中, $z_n = x_1(\tau_n, x_{10}, v_{n-1})$ 并且

$$u_n(t) = \begin{cases} v_{n-1}(t) & 0 \leq t \leq \tau_n \\ v_n(t) & \tau_n \leq t \leq t_1 \end{cases}$$
$$n = 1, 2, \dots$$

从(18)和(19)式以及应用 Gronwall 不等式, 可得到:

$$\begin{aligned} &\|x_1(t) - x_{11}\| \leq \\ &\exp(MKt_1)[\|y(t, \tau_n, z_n, v_n) - x_{11}\| + \\ &M(\|N(0)\| + K\|x_{11}\|(t - \tau_n))] \leq \\ &\frac{\epsilon}{2} + M(\|N(0)\| + K\|x_{11}\|)(t - \tau_n) \end{aligned}$$

所以, $\exists n = m > 0$ 和 $u(t) = u_m(t)$ 使得

$$\|x_1(t_1) - x_{11}\| \leq \epsilon$$

而且 $u(t) \in L^2(0, t_1; U)$, 是多项式型的。证毕。

3 一个公开问题

在第2部分的讨论中, 假设(2)是关键性的, 若能回答在什么条件下, 以(15)为前提当 $n \rightarrow \infty$ 时, 系统(17)所对应的线性系统对任何初始时间 $t_0 > 0$, ($t_0 < t_1$) 是近似能控的, 则是最为重要的, 这是一个公开问题。

参考文献:

[1] LIONS J L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems[J]. SIAM Review, 1988, 30(1): 1-99.

[2] ZHAO Y. The decomposition of an operator on product B-spaces and its applications[J]. Control Theory and Applications, 1985, 2(1): 11-19.

[3] LIONS J L. Optimal control of systems governed by partial differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1971.

[4] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

Controllability of Linear and Semi-linear Distributed-parameter System under Two Kinds of Boundary Control

CHAI Hua-jin¹, XIE Ling-li²

(1. Zhanjiang Ocean University, Zhanjiang 524088, Guangdong, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Based on the methods of system decomposition, the controllability of linear distributed parameter system via the controllable pair region is discussed under two kinds of boundary control. An example is given to indicate the application of the results. Furthermore, the approximate controllability of semi-linear distributed parameter system is studied under such kinds of boundary control.

Key words: controllability; boundary control; controllable pair region