

复合材料层合梁脱层分析的高阶模型^{*}

肖成锋, 富明慧

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 利用高阶剪切变形理论和变分原理, 建立了复合材料层合梁脱层附加状态的高阶模型, 并提出了相应的解析解法, 与二维有限元的数值结果的比较表明, 这里的高阶模型具有较好的精度。

关键词: 复合材料层合梁; 脱层; 附加状态; 高阶剪切变形理论

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 03-0113-04

脱层分析对于复合材料层合结构的剩余强度估计及破坏预报具有重要的意义。然而由于问题本身的复杂性, 目前这方面的研究还不很完善, 研究工作主要集中在浅埋的一维贯穿脱层和轴对称脱层问题, 分析的重点主要是脱层子层的屈曲失稳时的几何非线性行为、临界荷载的确定以及脱层的扩展行为等几方面, 可参见文 [1] 的综述。在脱层分析的理论和数值模型中, 各种板壳理论被广泛采用, 并且随着从经典板壳理论^[2] 向一阶^[3] 及三阶^[4] 剪切理论的发展, 分析的精度也在不同程度上得到了提高。

脱层在层合结构中所引起的应力变化, 是一个具有十分重要意义的问题, 但有关的理论分析并不多见。由于在脱层前沿应力的变化十分剧烈, 一阶或三阶剪切理论均无法给出令人满意的精度。文 [5] 对芯层采用更高阶的剪切理论模型分析了夹层梁的脱层问题, 取得了十分好的效果。本文对层合梁脱层的邻层采用较高阶次的剪切变形理论, 建立了脱层附加状态的微分方程, 并求出了相应的关于厚度坐标的任意次多项式解答。与二维有限元数值结果的比较表明, 较高次的多项式解答具有较好的精度, 并能较好地反应脱层前沿的应力集中现象。本文研究方法适用于复合材料层合梁任意长度和深度的脱层问题。

1 脱层附加状态及基本假设

不失一般性, 考虑三层的层合梁的脱层问题 (图 1)。假设由上至下三层的杨氏模量、剪切模量和厚度分别为 E_1, E_2, E_3 ; G_1, G_2, G_3 和 h_1, h_2, h_3 。

现假设第 1、2 层之间存在一长度为 $2a$ 的脱层区, 脱层区将整个梁分为脱层段和未脱层段。根据叠加原理, 含脱层的层合梁在外载作用下的状态

(真实状态, 见图 1a) 可分解为如下 2 个状态的叠加^[5,6]:

(1) 基本状态 (图 1b): 层合梁不含脱层区, 承受真实状态的横向载荷;

(2) 附加状态 (图 1c); 含脱层的层合梁, 不承受横向载荷, 而在上下脱层界面上作用着一对剪应力, 它们与基本状态 (图 1b) 中相应位置的剪应力大小相等, 方向相反。

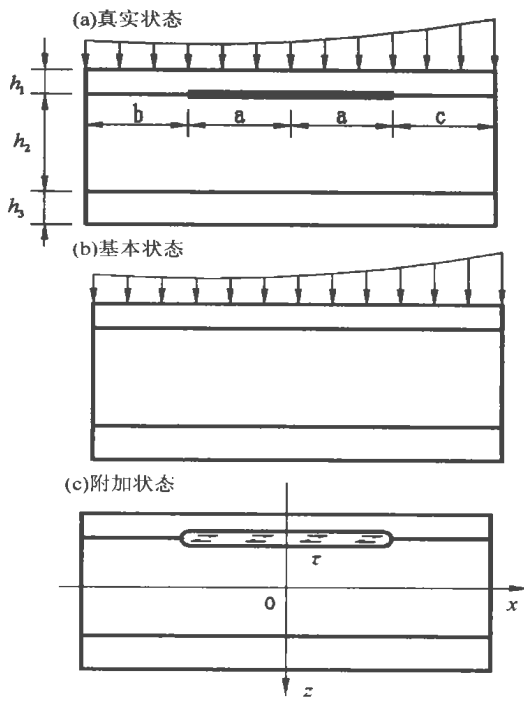


图 1 状态分解示意图

Fig 1 The scheme of state decomposition

基本状态不涉及脱层问题, 其分析方法已经比较成熟, 而附加状态则能反映由脱层所引起的“额

^{*} 收稿日期: 2003-07-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19902022); 广东省自然科学基金资助项目 (031552)

作者简介: 肖成锋 (1978 年生), 男, 研究生; 通讯联系人: 富明慧; E-mail: stsfmh@zsu.edu.cn

外”变化, 因而是本文研究的重点。

根据剪切变形理论, 各层内的位移场可表达为

$$u_i = \sum_{k=0}^{n_i} \alpha_{i,k} z^k, \quad i = 1, 2, 3, n_i \geq 3$$
$$w_1 = w_2 = w_3 = w(x) \quad (1)$$

其中, $\alpha_{i,k} (1 \leq i \leq 3, 0 \leq k \leq n_i)$ 是描述第 i 层轴向位移的广义坐标, $w(x)$ 是挠度。

根据上述位移表达式, 各层内的应变和应力场可表达为

$$\epsilon_i = u'_i, \gamma_i = w' + \frac{du_i}{dz} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$\sigma_i = E_i \epsilon_i, \tau_i = G_i \gamma_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

其中, ϵ_i, γ_i 分别为第 i 层的正应变和剪应变, 而 σ_i, τ_i 分别为第 i 层的正应力和剪应力。本文中符号“'”和“''”分别表示对坐标的一阶和二阶导数。

由于附加状态是自平衡状态, 因此在任意横截面 (包括脱层段) 上的总弯矩 Q 恒为零:

$$Q = \sum_{i=1}^3 \int_{zh_i}^{zh_{i+1}} \tau_i dz = 0 \quad (4)$$

其中, $zh_1 = -h_1 - h_2/2, zh_2 = -h_2/2, zh_3 = h_2/2, zh_4 = h_3 + h_2/2$ 。

2 控制方程及定解条件

下面首先建立未脱层段 (以右侧未脱层段为例) 的微分方程。在未脱层段, 相邻层间存在如下位移及剪应力连续条件:

$$u_1(x, -h_2/2) = u_2(x, -h_2/2),$$
$$\tau_1(x, -h_2/2) = \tau_2(x, -h_2/2) \quad (5)$$

$$u_3(x, h_2/2) = u_2(x, h_2/2),$$
$$\tau_3(x, h_2/2) = \tau_2(x, h_2/2) \quad (6)$$

此外, 在层合梁的上下表面, 还应该满足剪应力为零这一条件, 即

$$\tau_1(x, -h_1 - h_2/2) = 0, \tau_3(x, h_3 + h_2/2) = 0 \quad (7)$$

为方便推导, 不妨将脱层段与未脱层段的交界面 $x=a$ 处的边界视为位移边界 (这并不会影响变分后所得到的区间 $a < x < a+c$ 上的微分方程, 而仅影响 $x=a$ 的边界条件, 而这个边界条件本文将用另外的方法给出), 则右侧未脱层段的系统总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_a^{a+c} \left[\sum_{i=1}^3 \int_{zh_i}^{zh_{i+1}} (\sigma_i \epsilon_i + \tau_i \gamma_i) dz \right] dx \quad (8)$$

利用式 (4) — (7) 从上式中消去 $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,0}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, w$, 并将余下的 $m = n_1 + n_2 + n_3 - 3$ 个未知量记为向量形式:

$$\alpha = [\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \dots,$$

$$\alpha_{2,n_2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \dots, \alpha_{3,n_3}]^T$$

这样, 式 (8) 可转化为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_a^{a+c} [(\alpha')^T A \alpha' + \alpha^T B \alpha] dx \quad (9)$$

其中, A, B 均是 m 阶实对称矩阵, 其形式复杂, 可用 Mathematica 软件给出。对式 (9) 变分得

$$A \alpha'' = B \alpha \quad (10)$$

这就是脱层附加状态的未脱层段的微分方程, 它可用常规方法求解。

在脱层段, 第 2、3 层间的位移与应力连续条件 (6)、(7) 仍然成立, 但第 1、2 层间不再连续, 式 (5) 应代之以如下条件

$$\tau_1(x, -h_2/2) = \bar{\tau},$$
$$\tau_2(x, -h_2/2) = \bar{\tau} \quad (11)$$

脱层段的系统总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \sum_{i=1}^3 \int_{zh_i}^{zh_{i+1}} (\sigma_i \epsilon_i + \tau_i \gamma_i) dz dx - \int_{-a}^a \bar{\tau} (u_1 - u_2) dx \quad (12)$$

上式最后一项是脱层面上的已知剪应力所对应的外力势能。上式仍然不考虑 $x \pm a$ 边界的外力势能。

利用式 (4)、(6)、(7) 及 (11), 依次从上式中消去 $w, \alpha_{3,0}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,1}, \alpha_{2,n_2}$, 然后再将余下的 m 个未知量记成向量形式 (注意 $\alpha_{1,0}$ 未被消去):

$$\bar{\alpha} = [\alpha_{1,0}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \dots,$$
$$\alpha_{2,n_2-1}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \dots, \alpha_{3,n_3}]^T$$

然后对式 (12) 变分, 可得

$$\mathfrak{A} = \int_{-a}^a [\bar{\alpha} \bar{\alpha}']^T A \bar{\alpha}' - \bar{\tau}' S + \bar{\alpha}^T (B \bar{\alpha} - \bar{\tau} T)] dx \quad (13)$$

其中, A, B 均是 m 阶实对称矩阵。对上式第 1 项分部积分, 再由 $\bar{\alpha}$ 的任意性, 得

$$A \bar{\alpha}'' - B \bar{\alpha} = \bar{\tau}'' S - \bar{\tau} T \quad (14)$$

这就是脱层附加状态脱层段的微分方程。

现在给出脱层段与未脱层段联合求解的定解条件:

(1) 附加状态中, 梁的两端均为自由边界, 因而此处的应力应为零。

(2) 在脱层与未脱层段的交界面 $x = \pm a$ 应给出衔接条件。由于脱层前沿的应力具有奇异性, 有限次的多项式解答应仅适用于除裂纹尖端的一个小邻域 $(-h_2/2 - \delta, -h_2/2 + \delta)$ 以外的区域^[5], 参数 δ 的选择与多项式解答的次数有关, 多项式次数越高 (解答精度越高), 则 δ 应越小。类似于文

[5], 本文给出如下的衔接条件: 在横截面上高应力区 $(-h_2/2-\delta, -h_2/2+\delta)$ 以外部分取若干等分点, 令分点处的正应力和轴向位移连续。这样的定解条件可多给一些, 然后按最小二乘法求解。

3 实例分析

在实例分析中, 考虑附加状态脱层面上已知剪应力 $\tau=1$ 这一情况, 此时附加状态关于 z 轴是反对称的。本文仅考虑右半部分, 且采用无量纲计算。取脱层半长度 $a=1.5$, 未脱层段长度 $c=6$ 。三层的杨氏模量、剪切模量和厚度分别为 $E_1=2E_2=E_3=2$, $G_1=2G_2=G_3=0.8$, $h_1=0.5h_2=h_3=1$ 。

由于上述问题无法得到精确解, 因此将本文结果(虚线)与采用精化网格的二维有限元的数值结果(实线, 每层网格均为 251×51) 进行比较, 以检验本文模型的精度。

图 2 为裂纹尖端 $x=1.5$ 左右邻近截面上的正应力分布(阴影面积向右的为正, 反之为负, 图下方坐标表示截面位置, 应力值按比例 $1:8$ 绘制)。可以看出, 解析解与数值解能比较好地吻合, 而且距离裂纹尖端越远, 二者吻合得越好。此外, 第 1 层内的正应力沿厚度分布基本是线性的, 这证明许多研究工作中对脱层子层采用一阶剪切变形理论这一方法是合理的。图 3 为裂纹尖端 $x=1.5$ 左右邻近截面上的剪应力分布(应力值按比例 $1:4$ 绘制)。可以看出, 解析剪应力的精度没有解析正应力的精度高, 在脱层前沿尤其如此。但随着远离脱层前沿, 解析解的精度迅速提高。

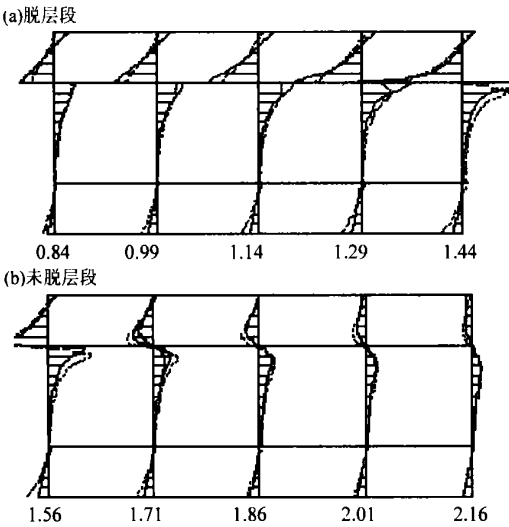


图 2 脱层前沿附近横截面上的正应力分布
Fig 2 Normal stresses distribution at cross section near delamination tip

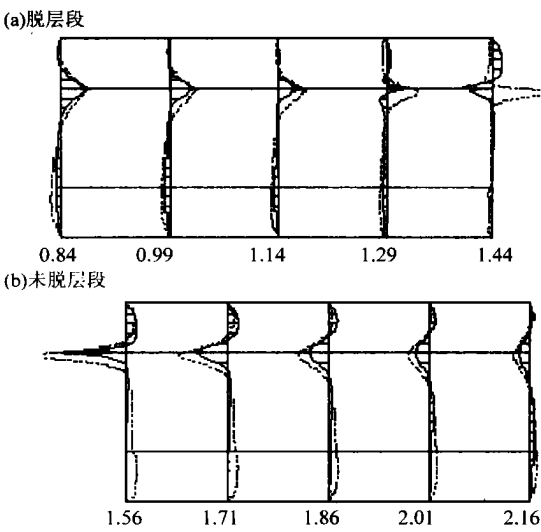


图 3 脱层前沿附近横截面上的剪应力分布
Fig 3 Shear stress distribution at cross section near delamination tip

图 4 为第 1、2 层之间的剪应力分布。可以看出, 脱层前沿的应力间断在本文解析解中得到了很好的体现。图 5 为附加状态的挠度(实线为第 2 层中面的数值解挠度), 解析解与数值解同样吻合得相当好。

研究还表明, 更高次的多项式解答能提供更精确的解析解。

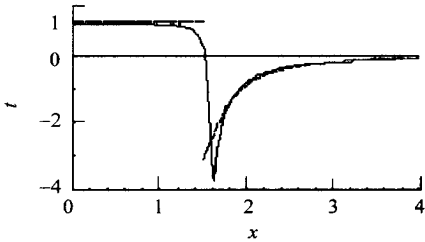


图 4 第 1、2 层间剪应力
Fig 4 Shear stress between the first and second layers

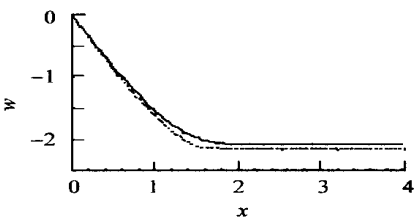


图 5 挠曲线
Fig 5 Deflection curve

(下转第 118 页)

Univ, Ser(B), 2004, 19(1): 57—66.

[7] MO J Q, TANG R R. A class of functional boundary value problems for the discontinuous nonlinear differential equations [J] . Math Appl, 2002, 15: 77—81.

[8] MO J Q, SHAO S. The singularly perturbed boundary value problems for higher-order semilinear elliptic equations [J] . Advances in Math, 2001, 30(2): 141—148.

[9] KEVORKIAN J, COLE J D. Multiple scale and singular perturbation methods [M] . New York: Springer-Verlag, 1996.

[10] CHANG K W, HOWES F A. Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and applications [M] . Applied Mathematical Sciences, 1984, 56.

The Singularly Perturbed Problem for Differential Equation of
Secoend Order with Boundary Perturbation

TANG Rong rong

(Huzhou Teachers College, Zhejiang Huzhou 313000, China)

Abstract: A class of singularly perturbed problems with boundary perturbation is considered. Under suitable conditions and using the theory of differential inequalities, the existence of solution is proved and the asymptotic behavior of solution for the boundary value problem is studied.

Key words: singular perturbation; boundary perturbation; differential inequality

(上接第 115 页)

参考文献:

[1] 李道奎, 周建平. 脱层梁屈曲的高阶剪切理论 [J] . 固体力学学报, 2000, 21(3): 225—233.

[2] CHAI H. Buckling and post-buckling behavior of elliptical plates(I) [J] . J Applied Mechanics, 1990, 57(4): 981—988.

[3] 孙先念, 陈浩然, 苏长健, 等. 含分层损伤复合材料层合板分层扩展研究 [J] . 力学学报, 2000, 32(2): 223—232.

[4] 陈浩然, 温玄玲, 左庄太. 含分层损伤轴对称复合材料层合壳的高阶理论及有限元分析 [J] . 大连理工大学学报, 1999, 39(5): 601—606.

[5] FU M H, LIU Z Q, YIN J R. Delamination Analysis of Sandwich Beam: High Order Theory [J] . AIAA J, 2002, 40(5): 981—986.

[6] 王奇志, 孟庆春, 张行. 复合材料层合梁分层问题解析解法 [J] . 北京航空航天大学学报, 1998, 24(3): 319—322.

High Order Model of Delamination Analysis for Composite Laminate beams

XIAO Cheng feng, FU Ming hui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Using high order shear deformation theory and variational principle, high order model of the additional state of composite laminate delaminated beams with delamination is established. The corresponding analytical method is given. As compared with 2D finite element solutions, the model presents good precision in calculation.

Key words: composite laminated beam; delamination; additional state; principle of high order shear deformation