

多项式代数方程根的完全分类及其应用^{*}

杨翠红¹, 朱思铭¹, 梁肇军²

(1. 中山大学数学与计算机科学学院, 广东 广州 510275;

2. 华中师范大学数学系, 湖北 武汉 430079)

摘 要: 用 Mathematica 实现杨路、张景中等提出的关于多项式代数方程根的完全分类的算法, 并介绍了其在代数及常微分方程中的应用。

关键词: 多项式代数方程; 判别系统; 常微分方程

中图分类号: O151.1; O175.12 **文献标识码:** A

文章编号: 0529-6579 (2003) 01-0005-04

1 多项式代数方程根的完全分类简介

实系数代数方程实、虚根分类的判定问题, 是代数学基本的经典问题之一^[1,2], 在数学其他分支和计算机自动推理、数学机械化以及技术和工程学科的智能化等领域都有重要的应用。

阿贝尔 (1802—1829) 曾证明, 对 n 次的实系数代数多项式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \\ a_1, \cdots, a_n \text{ 为实参数} \quad (1)$$

当 $n \geq 5$ 时, $f(x) = 0$ 没有显示的公式解。因此, 对高次的代数多项式方程, 人们关注的不是求它的根的显示表达式, 而是通过对由方程系数组成的多项式判别系统进行研究, 从而了解解的性态, 比如判定实根、虚根个数及其重数等问题。

对一个给定的多项式代数方程, 斯图姆给出了判定其实根个数的算法。但是当 $n \geq 7$ 时, 对文字系数的多项式代数方程, 由于斯图姆组的计算非常困难, 斯图姆算法并不适用^[3]。

杨路等^[1]给出了一个关于文字系数多项式实根个数的显式判定算法, 提出多项式判别矩阵的概念和由它产生的多项式判别系统的概念。在此基础上, 给出了多项式判别序列的符号修订表的变号数与多项式互异实根个数之间的对应关系, 给出了实根重数的显式判准以及在给定区间内多项式实根个数的显式判准, 并给出了一个产生判别矩阵和判别式序列的简短的 Maple 程序, 作出了 5 次和 6 次多项式方程根的完全分类的例子。

当多项式的次数增大时, 由于判别过程变得非

常复杂, 判别系统的计算量也非常之大, 怎样用程序方便快捷地实现文[1]的算法是个很现实的问题。本文作者编写了一个 Mathematica 软件包来实现文[1, 2]中的算法, 给出了多项式代数方程根的完全分类判定和正根分布的判定, 同时举例说明在代数几何和常微分方程定性理论中的应用。考虑到目前国内使用 Mathematica 软件非常普遍, 而使用 Maple 软件的人较少, 本文的工作将会给使用 Mathematica 的数学工作者带来方便。

2 多项式代数方程根的完全分类和 Mathematica 软件包

多项式判别系统、判别序列、重因子序列、判别序列的符号表和符号修订表, 以及符号修订表的变号数的概念如文[1]和文[3]第 6 章中所定义。对实系数多项式代数方程有如下根的完全分类判定定理^[1,3]:

判别定理 设 $\sigma_0 = 1, \sigma_i = D_i$ 是 n 次多项式 $f(x)$ 的判别多项式序列 $D_1(f), D_2(f), \cdots, D_n(f)$ 中第 i 个不等于零的项 ($i = 1, \cdots, k$)。又设 $s_i = q_{i+1} - q_i - 1$ ($i = 0, 1, \cdots, k-1; q_0 = 0$), 判别式序列的符合修订表的变号数为 v 。如果 $D_l(f) \neq 0, D_m(f) = 0$ ($m > l$), 那么 ① $f(x)$ 的互异共轭虚根对的数目为 v ; ② $f(x)$ 的互异实根的个数为 $l - 2v$; ③ α 是 $f(x)$ 的 m 重根, 当且仅当 α 是重因子序列 $\Delta_{m-l}(f)$ 的 $m-1$ 重根。

本文的 Mathematica 软件包可以用于多项式代数方程根的完全分类判定和正根分布的判定。

* 收稿日期: 2002-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10071097)

作者简介: 杨翠红 (1975 年生) 女, 博士研究生; 通讯联系人: 朱思铭, E-mail: mcp00ych@student.zsu.edu.cn

对任意一个 n 次实系数多项式 $f(x)$, 软件包中函数 Sys1[f, x] 可以给出其重因子序列, 函数 Sys2[f, x] 可以给出其判别式序列。从而可以给出 $f(x)$ 的判别系统。

若要得到 $f(x)$ 的正根分布的判定, 只需考虑函数 $g(x) = f(x^2)$ 。 $f(x)$ 的正根个数为 $g(x)$ 的实根个数的一半。

软件包名为 “discr1”, 程序如下:

```
BeginPackage["discr1"]
De::usage="De[f,x,k] gives the k-th discriminant of f(x)."
Dl::usage="Dl[f,x,k] gives the k-th multiple factor of f(x)."
Sys1::usage="Sys1[f,x] gives the multiple factor sequence of f(x)."
Sys2::usage="Sys2[f,x] gives the discriminant sequence of f(x)."

Begin["`Y`"]
d[f_,x_,n_,i_]:=Coefficient[f,x,n-i];
F[f_,x_,i_,j_]:=Modul[d[g,n],g=D[f,x];n=Exponent[f,x];
a[f,x,n,i]*a[g,x,n,j]-a[g,x,n,i]*a[f,x,n,j];
d[f_,x_,i_,j_]:=Sum[F[f,x,m-1,i+j-m+1+1],{m,1,
Min[i,j]+1}];
dd[f_,x_,k_,t_,i_,j_]:=d[f,x,i-1,j-1];1<=j<=k-1;
dd[f_,x_,k_,t_,i_,j_]:=Module[{n},n=Exponent[f,x];
d[f,x,i-1,k+t-1];j>=k&&k<=k+t<=n];
bz[f_,x_,k_,t_]:=Det[TableForm[Table[dd[f,x,k,t,i,j],
{i,1,k},{j,1,k}],TableDepth->1]];
Dl[f_,x_,k_]:=Module[{n},n=Exponent[f,x];Sum[bz[f,x,n-
k,t],{t,0,k}];
De[f_,x_,k_]:=De[TableForm[Table[d[f,x,i,j],{i,0,k-1},
{j,0,k-1}],TableDepth->1]];
Sys1[f,x]:=Module[{n},n=Exponent[f,x];Table[Dl[f,x,
k],{k,0,n-1}];
Sys2[f,x]:=Module[{n},n=Exponent[f,x];Table[De[f,x,
k],{k,1,n}];
End[]
EndPackage[]
```

使用时先调入软件包“discr1”, 输入实系数多项式 $f(x)$, 然后运行 Sys1[f, x] 和 Sys2[f, x], 就可以得到 $f(x)$ 的重因子序列和判别式序列。然后根据判别定理, 可以得到 $f(x)$ 的根的完全分类。如定义 $g(x) = f(x^2)$, 则运行 Sys1[g, x] 和 Sys2[g, x] 后得到 $g(x)$ 的重因子序列和判别式序列, 而 $f(x)$ 的正根个数为 $g(x)$ 的实根个数的一半。

例如, 对 7 次实系数多项式

$$f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x$$

在 Mathematica 4.0 中输入

$$f = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x$$

再执行上面的软件包, 之后分别运算 Sys1[f, x] 和 Sys2[f, x], 就可以得到 $f(x)$ 的重因子序列和判别式序列。然后根据文[1]的判别方法, 可以得到 $f(x)$ 的根的完全分类判定结果。

3 应用举例

3.1 多项式根的分类判定在代数几何方面的应用

对一个数字系数的多项式, 利用上面的软件包可以方便地求出其判别多项式的符号表, 进而可以直接利用文[1]的判别方法, 得到根的判定结果。对一个文字系数的多项式, 用上面的程序得到一个多项式的根的完全分类结果之后, 可以将此结果应用到很多方面。最直接的应用是代数几何方面的命题。

例 1 设 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, 试求其实根和虚根的个数和重数。

执行 Mathematica 软件包“discr1”, 函数 Sys2[f, x] 给出的 $f(x)$ 的判别式序列的符号表为 $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, -1\}$, 符号修订表为 $\{1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1\}$, 符号修订表的变号数为 9, 所以 $f(x)$ 有 9 对共轭虚根, 2 个实根, 所有的根都是单根。

例 2 ($\forall x$) $x^6 + ax^3 + bx + c \geq 0$, 试求参数 a, b, c 应该满足的条件。

设 $f(x) = x^6 + ax^3 + bx + c$, 则该命题等价于求 $f(x)$ 没有实根或各实根的重数都是偶数的条件。执行软件包“Discr1”, 函数 Sys2[f, x] 给出 $f(x)$ 的判别式序列如下:

$$\{1, 0, -a^2, D_4, D_5, D_6\} \quad (2)$$

其中, $D_4 = -a^2(a^2 - 4c)$,

$$\begin{aligned} D_5 &= b(27a^5 + 625b^3 - 378a_3c + 1080ac^2), \\ D_6 &= 108a^5b^3 + 3125b^6 - 1350a^3b^3c + 729a^9c^2 + 27000ab^3c^2 - 8748a^4c^3 + 34992a^2c^4 - 46656c^5, \end{aligned}$$

这样当 $f(x) \geq 0$ 且仅当下述条件之一成立:

- ① $a \neq 0, a^2 > 4c, D_5 = 0, D_6 = 0, E_2 \geq 0$;
- ② $D_5 > 0, D_6 = 0$;
- ③ $a \neq 0, a^2 > 4c, D_6 = 0$;
- ④ $a \neq 0, a^2 > 4c, D_5 > 0, D_6 < 0$;
- ⑤ $a = 0, D_6 < 0$

其中, $E_2 = b(2160ac^2 - 432a^3c + 625b^3 - 27a^5)$ 是 $\Delta_2(f) = (9a^3 - 36ac)x^2 + 50b^2x + 3a^2b + 60bc$ 的

判别式。

例 3 求函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的正根分布判定。

令 $g(x) = f(x^2) = x^6 + ax^4 + bx^2 + c$ 。那么 $f(x)$ 的正根个数为 $g(x)$ 的实根个数的一半。执行软件包“Discr1”，函数 Sys2[g, x] 给出 $g(x)$ 的判别式序列如下：

$$\{1, -a, -aA_1, A_1A_2, -A_2A_3, -cA_3^2\} \quad (3)$$

其中, $A_1 = a^2 - 3b, A_2 = a^2b - 4b^2 + 3ac, A_3 = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2$ 。

对 $g(x)$ 做根的完全分类判定, 可以得到 $f(x)$ 的正根分布情况如下：

① 当且仅当判别式序列 (3) 的符号修订表为 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ 时, $f(x)$ 有 3 个单正根；

② 当且仅当判别式序列 (3) 的符号修订表为下列之一时, $f(x)$ 有 2 个单正根：

$\{1, -1, -1, -1, -1, -1\}, \{1, 1, -1, -1, -1, -1\}, \{1, 1, 1, -1, -1, -1\}, \{1, 1, 1, 1, -1, -1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, -1\}$ ；

③ 当且仅当判别式序列 (3) 的符号修订表为下列之一时, $f(x)$ 有一个单正根：

$\{1, -1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, -1, -1, 1, 1, 1\}, \{1, -1, -1, -1, 1, 1\}, \{1, 1, -1, -1, 1, 1\}, \{1, 1, -1, -1, -1, 1\}, \{1, 1, 1, -1, -1, 1\}, \{1, 1, 1, -1, 1, -1\}, \{1, 1, 1, 1, -1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, -1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ；

④ 记重因子 $d_2(x) = 2A_1c + A_1A_2x^2$ ，其判别式序列为 $h_2 = \{1, -cA_1A_2^5\}$ 。

当且仅当判别式序列 (3) 的符号修订表为 $\{1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ ， h_2 的符号修订表为 $\{1, 1\}$ 时, $f(x)$ 有一个单正根和一个 2 重正根；

⑤ 记重因子 $d_4(x) = -3c - 2bx^2 - ax^4$ ，其判别式序列为

$$h_4 = \{1, -a^3b, a^3b(-b + 3ac), a^3c(-b^2 + 3ac)^2\}$$

记 $d_4(x)$ 的重因子 $d_{42}(x) = -a^3(3c + bx^2)$ ，其判别式序列为

$$h_{42} = \{1, -a^2b^3c\}$$

当且仅当判别式序列 (3) 的符号修订表为 $\{1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ ， h_4 的符号修订表为 $\{1, 1, 0, 0\}$ ， h_{42} 的符号修订表为 $\{1, 1\}$ 时, $f(x)$ 有一个 3 重正根。

3.2 多项式根的分类在常微分方程中的应用

在多项式微分方程中遇到的奇点分岔问题, 可以用多项式根的完全分类来辅助解决。

例 4 求 $\frac{dx}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3$ 的奇点分岔。

令 $f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3$ ，由上述程序中的函数 Sys2[f, x] 给出的 $f(x)$ 的判别式序列为 $\{1, \lambda_2, -27\lambda_2^2 + 4\lambda_2^3\}$ 。记 $D_3 = -27\lambda_2^2 + 4\lambda_2^3$ ， $f(x)$ 的根的完全分类情况为：

① 当且仅当 $\lambda_2 > 0, D_3 > 0$ 时, $f(x)$ 有 3 个单实根；

② 当且仅当 $\lambda_2 > 0, D_3 = 0$ 时, $f(x)$ 有 1 个单实根和 1 个两重实根；

③ 当且仅当 $\lambda_2 > 0, D_3 < 0$ 或 $\lambda_2 < 0$ 时, $f(x)$ 有一个单实根和一对共轭虚根；

④ 当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时, $f(x)$ 有一个 3 重实根 (即为原点)；

由此可以得出 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 在平面上使对应的系统成为结构不稳定的点的集合为原点 $O(0, 0)$ 和由 $\{\lambda \mid \lambda_1 = \pm 2\left(\frac{\lambda_2}{3}\right)^{3/2}, \lambda_2 > 0\}$ 给出的 2 条分岔曲线 Γ_+, Γ_- ，它们在 O 点相切，并形成尖点。用这种方法得到的结果与文 [5, p19] 中的结果一致，判别过程非常简单明了。

例 5 求平面 7 次 Hamilton 向量场的全局相图分类^[4]

$$\frac{dx}{dt} = -y[b_1, b_2(x^2 + y^2) + b_3(x^2 + y^2)^2 + b_4(x^2 + y^2)^3] + a_5(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6) - b_5(y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y)$$

$$\frac{dy}{dt} = x[b_1, b_2(x^2 + y^2) + b_3(x^2 + y^2)^2 + b_4(x^2 + y^2)^3] + a_5(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6) + a_5(y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y)$$

对此系统作极坐标变换之后, 利用 6 次多项式代数方程根的完全分类结果, 文 [4] 讨论了该系统的奇点个数和奇点类型, 并给出了系统有 49 个奇点时的 14 种全局相图。

例 6 对具有 Holling II 型功能反应的捕食—被捕食系统^[9]

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{ax^2}{x^2 + \beta^2},$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left[-d + e\frac{ax^2}{x^2 + \beta^2} - by\right]$$

文 [7] 利用多项式根的完全分类判定方法和常微分方程定性理论, 分别得到了该系统具有一个中心、两个中心、一个稳定极限环和一个不稳定极限环的条件。

由上述例子可以看出, 多项式根的完全分类判定为代数几何和常微分方程定性理论的研究提供了新的方法, 不但能够简化现有的方法, 更重要的是它

使人们对很复杂的系统不再望而却步, 因为现在我们可以用这个有力的工具来方便的对其进行研究. 本文中给出的 Mathematica 软件包可以有效的实现文[1, 2] 中的算法, 方便使用 Mathematica 的数学工作者。

参考文献:

[1] YANG L, HOU X R, ZENG Z B. A complete discrimination system for polynomials[J] . Science In China (Series E), 1996, 39(6) : 625— 646.
[2] YANG L. Recent advances on determining the number of real

roots of parametric polynomials[J] . J Symbolic Computation, 1999, 28: 225— 243.
[3] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明[M] . 上海: 上海科技教育出版社, 1996.
[4] YANG L J, WU X M. Classification of the phase portrait for planar-equivariant Hamiltonian system of degree 7[J] . Ann Diff Eqs, 2001, 17(4): 385— 390.
[5] 张芷芬, 李承治. 向量场的分岔理论基础[M] . 北京: 高等教育出版社, 1997.
[6] YANG C H, LIANG Z J. Existence of limit cycle and center in two species predator-prey system with Holling III— functional response[J] . J of Math, 2001, 21(2) : 145— 150.

Complete Discriminaiton of the Roots of Polynomials and Its Applications

YANG Cui hong¹, ZHU Si ming¹, LLANG Zhao jun²

(1. Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Mathematics, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: The software *Mathematica* is applied to get the complete discrimination of the roots of polynomials which is proposed by Yang Lu, Zhang Jingzhong, et al. Applications of complete discrimination in algebra and ordinary differential equations are also introduced.

Key words: polynomials; discrimination system; ordinary differential equations

简 讯

本刊入选“百种中国杰出学术期刊”

据中国科技信息研究所 2002 年 12 月发布的信息,《2001 年度中国科技论文统计结果》公布了“2001 年度百种中国杰出学术期刊”, 中山大学学报(自然科学版) 入选其中, 是入选的 4 家综合类高校学报之一。该项评定是根据该所制定的中国科技期刊综合指标评价体系, 对期刊的被引频次、影响因子、即年指标、基金论文比、他引总引比等多项重要指标, 分学科进行综合评分, 并与引文数据库收录的科技期刊进行综合评定, 这是首次评出的中国百种杰出学术期刊。

近几年来, 中山大学学报在校领导和广大教师、作者的支持下, 坚持办刊宗旨, 深化改革, 办出特色, 学术质量和办刊水平有了新的提高, 多项评估指标进入高校学报的前列。本刊的被引频次和影响因子连续多年位于中国科技期刊综合类的前 10 名。

(本刊通讯员)