

不确定模糊集的基本定理^{*}

黎永锦^{1,2}, 赵志红², 高东平¹

(1. 中山大学逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275;

2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 不确定模糊集是基于信息和知识的不确定性提出来的, 在处理信息系统中知识的不完善、不确定问题时有其自身的优点。定义了不确定模糊集上的截集, 讨论了其性质。并在此基础上证明了不确定模糊集的分解定理、表现定理和扩展定理等基本定理。

关键词: 不确定模糊集; 不确定模糊截集; 分解定理; 表现定理; 扩展定理

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 05-0001-04

1965年美国控制论专家 Zadeh 教授^[1,2]提出了模糊集的概念, 用来刻画模糊现象和模糊概念。在当今的信息时代, 人们接触到的有些信息是确定的, 但更多的信息是不确定的。如经济中伴随着大量的不确定信息, 股票证券或期货市场总是处在不确定的波动状态; 某些传染性疾病的传播过程中有很多的不确定因素。在模糊集理论的基础上, 黎永锦和鞠实儿等提出了不确定模糊集的概念, 作为对模糊集的推广。不确定模糊集不满足互补律, 即突破了 $\mu_A(x) + \mu_{\bar{A}}(x) = 1$ 的框架, 从“属于程度”、“不属于程度”和“不确定”三个角度去刻画一个命题的真值。这样, 不确定模糊集比模糊集更加客观合理地描述了人的无知。不确定模糊逻辑将能比较合理地表达人类的思考方法和主观上的模糊量(包含自然语言), 如人们在遇到信息和计算能力的限制时, 不能本源地反映事物本质特性的信息时所做出的判断和推理。本文主要探讨不确定模糊集的截集的有关性质、不确定模糊集的分解定理、表现定理和扩展定理。

1 不确定模糊截集

不确定模糊集 A 由 3 个变量确定, 对于论域 X 中的一点 x , x 属于 A 的程度为 $\mu_A(x) = \alpha \in [0, 1]$, x 不属于 A 程度为 $\nu_A(x) = \beta \in [0, 1]$, x 对 A 的不确定度为 $\eta_A(x) = \gamma \in [0, 1]$, 对论域中的任一 x , 都满足 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。不确定模糊集在处理信息系统中知识的不完善、不确定和人的无知等问题

较粗糙集和模糊集有其自身的优点, 在模糊数学中, 截集是模糊集和与普通集合相互转化的一个重要概念。在不确定模糊集上我们也将对此概念进行推广。

定义 1 设 X 是论域, I 为单位闭区间, 即 $I = [0, 1]$, 若映射

$$A: X \rightarrow (I, I, I)$$

$$x \mapsto (\mu_A(x), \nu_A(x), \eta_A(x))$$

且 $\mu_A(x) + \nu_A(x) + \eta_A(x) = 1$, 则称 A 为 X 上的不确定模糊集, X 上不确定模糊集全体记为 $UF(X)$ 。由于 $\mu_A(x) + \nu_A(x) + \eta_A(x) = 1$, 因此可将不确定模糊记为 $(\mu_A(x), 1 - \mu_A(x) - \eta_A(x), \eta_A(x))$, 因而有时也可将不确定模糊简记为 $(\mu_A(x), \eta_A(x))$ 。

下面用符号 $(I, I) = \{(a, b) : a + b \leq 1, a, b \in I\}$, 注意 (a, b) 不是表示开区间, 且 a, b 无大小关系, 仅是一种记号。

定义 2 对 $a_t \in I, t \in T$, 规定

$$\bigvee_{t \in T} a_t = \sup\{a_t, t \in T\};$$

$$\bigwedge_{t \in T} a_t = \inf\{a_t, t \in T\}.$$

定义 3 对 $(a_t, b_t) \in (I, I), t \in T$, 规定

$$\bigvee_{t \in T} (a_t, b_t) = [\bigvee_{t \in T} a_t, \bigwedge_{t \in T} b_t];$$

$$\bigwedge_{t \in T} (a_t, b_t) = [\bigwedge_{t \in T} a_t, \bigvee_{t \in T} b_t];$$

$$(a_t, b_t)^c = (1 - a_t - b_t, b_t).$$

定义 4 对 $(a_i, b_i) \in (I, I), i = 1, 2$, 规定

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2;$$

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2, b_1 \geq b_2;$$

* 收稿日期: 2003-11-24

基金项目: 教育部人文社会科学重点研究基地重大资助项目 (2000ZDX720 40002); 教育部跨世纪人才基金资助项目 (99JA720001)

作者简介: 黎永锦 (1963 年生) 男, 副教授; E-mail: stslj@zsu.edu.cn

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1, b_1 \leq (a_2, b_2)$$

$$\text{且 } (a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$$

定义 5 设 $A_t \in UF(X)$, $t \in T$, $\forall x \in X$, 规定:

$$\bigcup_{t \in T} A_t: \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) (x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x)$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t: \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right) (x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x)$$

$$A_t^c: (A_t^c)(x) = (A_t(x))^c$$

$$A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow A_1(x) \leq A_2(x), t_1, t_2 \in T$$

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1(x) = A_2(x), t_1, t_2 \in T$$

定义 6 对 $A \in UF(X)$, 设 $A(x) = (a^\mu(x), b^\eta(x))$, $x \in T$, 称普通模糊集

$$A^\mu: X \rightarrow I, x \mapsto A^\mu(x) = a^\mu(x),$$

$$A^\eta: X \rightarrow I, x \mapsto A^\eta(x) = a^\eta(x).$$

分别为 A 的确定模糊集和不确定模糊集, 且以后记 $A(x) = (A^\mu(x), A^\eta(x))$, 且 $A^\mu(x) + A^\eta(x) \leq 1$, 若 $A^\eta(x) = 0$, A 退化为普通模糊集。

定理 1 设 $A_t \in UF(X)$, $t \in T$, 则

$$(1) \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)^\mu = \bigcup_{t \in T} A_t^\mu; \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)^\eta = \bigcap_{t \in T} A_t^\eta;$$

$$(2) \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)^\mu = \bigcap_{t \in T} A_t^\mu; \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)^\eta = \bigcup_{t \in T} A_t^\eta;$$

$$(3) (A_t^c)^\mu = (A_t^\mu)^c - A_t^\eta, (A_t^c)^\eta = A_t^\eta.$$

定义 7 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 集合

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \{x \in X: \lambda_1 \leq A^\mu(x), \lambda_2 \geq A^\eta(x)\}$$

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \{x \in X: \lambda_1 < A^\mu(x), \lambda_2 > A^\eta(x)\}$$

分别称为 A 的 (λ_1, λ_2) -截集和 (λ_1, λ_2) -截集。

下面讨论 $A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ 和 $A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ 的性质。

性质 1 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 则

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$A_{(0, 1)} = X \text{ 且 } A_{(1, 0)} = \Phi.$$

性质 2 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_3, \lambda_4) \in (I, I)$, 且 $(\lambda_1, \lambda_2) < (\lambda_3, \lambda_4)$, 则

$$(1) A_{(\lambda_3, \lambda_4)} \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(2) A_{(\lambda_3, \lambda_4)} \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(3) A_{(\lambda_3, \lambda_4)} \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)}.$$

证明 只证结果 (3), 其它类似可证。

若 $\forall x \in A_{(\lambda_3, \lambda_4)}$, 则 $A^\mu(x) \geq \lambda_3$, 且 $A^\eta(x) \leq \lambda_4$, $(\lambda_1, \lambda_2) < (\lambda_3, \lambda_4)$, 因而 $\lambda_3 > \lambda_1$, $\lambda_4 < \lambda_2$, 从而 $A^\mu(x) \geq \lambda_3 > \lambda_1$, $A^\eta(x) \leq \lambda_4 < \lambda_2$, 因此, 有 $x \in A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$, 所以 $A_{(\lambda_3, \lambda_4)} \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ 。

性质 3 设 $A, B \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 则

$$(1) (A \cup B)_{(\lambda_1, \lambda_2)} = A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cup B_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cup (A_{\lambda_1}^\mu \cap B_{\lambda_2}^\eta) \cup (B_{\lambda_1}^\mu \cap A_{\lambda_2}^\eta);$$

$$(2) (A \cup B)_{(\lambda_1, \lambda_2)} = A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cup B_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cup (A_{\lambda_1}^\mu \cap B_{\lambda_2}^\eta) \cup (B_{\lambda_1}^\mu \cap A_{\lambda_2}^\eta);$$

$$(3) (A \cap B)_{(\lambda_1, \lambda_2)} = A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cap B_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(4) (A \cap B)_{(\lambda_1, \lambda_2)} = A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cap B_{(\lambda_1, \lambda_2)}.$$

性质 4 设 $A_t \in UF(X)$, $t \in T$, 则

$$(1) \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)_{(\lambda_1, \lambda_2)} \supset \bigcup_{t \in T} A_{t, (\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(2) \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)_{(\lambda_1, \lambda_2)} \supset \bigcup_{t \in T} A_{t, (\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(3) \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \bigcap_{t \in T} A_{t, (\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(4) \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset \bigcap_{t \in T} A_{t, (\lambda_1, \lambda_2)}.$$

性质 5 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_{1t}, \lambda_{2t}) \in (I, I)$, $t \in T$, 则

$$(1) A_{(\bigvee_{t \in T} \lambda_{1t}, \bigwedge_{t \in T} \lambda_{2t})} = \bigcap_{t \in T} A_{(\lambda_{1t}, \lambda_{2t})};$$

$$(2) A_{(\bigwedge_{t \in T} \lambda_{1t}, \bigvee_{t \in T} \lambda_{2t})} \supset \bigcup_{t \in T} A_{(\lambda_{1t}, \lambda_{2t})}.$$

性质 6 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$

$$(1) A_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \bigcap_{\substack{\alpha_1 < \lambda_1 \\ \alpha_2 > \lambda_2}} A_{(\alpha_1, \alpha_2)} (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 1);$$

$$(2) A_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \bigcup_{\substack{\alpha_1 < \lambda_1 \\ \alpha_2 < \lambda_2}} A_{(\alpha_1, \alpha_2)} (\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 0).$$

2 不确定模糊集的分解定理

分解定理反映了模糊集与普通集的相互转化关系, 不确定模糊集上的分解定理则反映了不确定模糊集与普通集的相互转化关系。

定义 8 设 $A \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 规定 $(\lambda_1, \lambda_2)A \in UF(X)$ 为

$$((\lambda_1, \lambda_2)A)(x) =$$

$$((\lambda_1, \lambda_2) \wedge (A^\mu(x), A^\eta(x)) =$$

$$(\lambda_1 \wedge A^\mu(x), \lambda_2 \vee A^\eta(x))$$

定理 2 设 $A, B \in UF(X)$, $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_3, \lambda_4) \in (I, I)$, 则

(1) 如果 $(\lambda_1, \lambda_2) < (\lambda_3, \lambda_4) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)A \subset (\lambda_3, \lambda_4)A$;

(2) 如果 $A \subset B \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)A \subset (\lambda_1, \lambda_2)B$ 。

定理 3 (分解定理 I) 设 $A \in UF(X)$, 则

$$A = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2)A_{(\lambda_1, \lambda_2)} =$$

$$\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2)A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$$

定理 4 (分解定理 II) 设 $A \in UF(X)$, R_0 为 $[0, 1]$ 上的有理点集, 则

$$A = \bigcup_{(r_1, r_2) \in (R_0, R_0)} (r_1, r_2)A_{(r_1, r_2)} =$$

$$(r_1, r_2) \in (R_0, R_0) (r_1, r_2) A_{(r_1, r_2)}$$

推论 1 设 $A, B \in UF(X)$, 则 $A \subset B$ 的充分必要条件为

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset B_{(\lambda_1, \lambda_2)}, (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I);$$

$$\text{或 } A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset B_{(\lambda_1, \lambda_2)}, (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I);$$

$$\text{或 } A_{(r_1, r_2)} \subset B_{(r_1, r_2)}, (r_1, r_2) \in (R_0, R_0)。$$

证明 只证第 1 种情况, 必要性显然;

充分性, 如果 $A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset B_{(\lambda_1, \lambda_2)}, (\lambda_1, \lambda_2) \in$

(I, I) , 由分解定理 I 可知

$$A(x) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) A_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x) \leq$$

$$\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) B_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x) = B(x)$$

定理 5 (分解定理 III) 设 $A \in UF(X)$, 令

$$H: (I, I) \rightarrow P(X) (P(X) \text{ 表示 } X \text{ 的幂集})$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto H(\lambda_1, \lambda_2)$$

满足

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset H(\lambda_1, \lambda_2) \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)}$$

$$\text{则 (1) } A = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) H(\lambda_1, \lambda_2);$$

$$(2) \text{ 如果 } (\lambda_1, \lambda_2) < (\lambda_3, \lambda_4), \text{ 则 } H(\lambda_1, \lambda_2) \supset H(\lambda_3, \lambda_4);$$

$$(3) A_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \bigcap_{\substack{\alpha_1 < \lambda_1 \\ \alpha_2 > \lambda_2}} H(\alpha_1, \alpha_2) (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 1);$$

$$(4) A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \supset \bigcup_{\substack{\alpha_1 > \lambda_1 \\ \alpha_2 < \lambda_2}} H(\alpha_1, \alpha_2), (\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 0)。$$

3 不确定模糊集的表现定理

模糊集上的表现定理以代数观点给出了用普通集表示模糊集的方法, 由集合套而得到, 所以建立不确定模糊集的表现定理, 首先集合套推广为二元集合套。

定义 9 设 X 是经典集合, $P(X)$ 表 X 的幂集, 映射

$$H: (I, I) \rightarrow P(X) \\ (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto H(\lambda_1, \lambda_2)$$

满足

$$(\lambda_1, \lambda_2) \leq (\lambda_3, \lambda_4) \Rightarrow H(\lambda_1, \lambda_2) \supset H(\lambda_3, \lambda_4)$$

称 H 为 X 上的二元集合套, X 上的二元集合套全体记为 $BK(X)$ 。

定义 10 设 $H_1, H_2 \in BK(X)$, 如果任意 $(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$ 有

$$H_1(\lambda_1, \lambda_2) \subset H_2(\lambda_1, \lambda_2)$$

称 H_1 含于 H_2 , 记为 $H_1 \subset H_2$ 。

定义 11 $H \in BK(X)$, $H_t \in BK(X) (t \in T)$,

$(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 规定

$$\left\{ \bigcap_{t \in T} H_t \right\} (\lambda_1, \lambda_2) = \bigcup_{t \in T} H_t (\lambda_1, \lambda_2); \\ \left\{ \bigcup_{t \in T} H_t \right\} (\lambda_1, \lambda_2) = \bigcap_{t \in T} H_t (\lambda_1, \lambda_2)。$$

定理 6 (表现定理) 映射

$$T: BK(X) \rightarrow DF(X)$$

$$H \mapsto T(H) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) H(\lambda_1, \lambda_2)$$

则 (1) T 是满射;

$$(2) \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I), (T(H))_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset$$

$$H(\lambda_1, \lambda_2) \subset (T(H))_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

$$(3) \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I), (T(H))_{(\lambda_1, \lambda_2)} =$$

$$\bigcap_{\substack{\alpha_1 < \lambda_1 \\ \alpha_2 > \lambda_2}} H(\alpha_1, \alpha_2) (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 1);$$

$$(4) \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I), (T(H))_{(\lambda_1, \lambda_2)} \supset$$

$$\bigcup_{\substack{\alpha_1 > \lambda_1 \\ \alpha_2 < \lambda_2}} H(\alpha_1, \alpha_2) (\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 0)。$$

4 不确定模糊集扩展原理

经典扩展原理:

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) = y$$

则 f 诱导出

$$f: P(X) \rightarrow P(Y)$$

$$A \mapsto f(A) = \{y \mid \forall x \in A, y = f(x)\}$$

$$f^{-1}: P(Y) \rightarrow P(X)$$

$$B \mapsto f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

且

$$f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x),$$

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$$

定义 12 (扩展原理) $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$, 则 f 可诱导出一个从 $UF(X)$ 到 $UF(Y)$ 的映射以及 $UF(Y)$ 到 $UF(X)$ 的映射,

$$f: UF(X) \rightarrow UF(Y)$$

$$A \mapsto f(A), f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$$

$$f^{-1}: UF(Y) \rightarrow UF(X)$$

$$B \mapsto f^{-1}(B), f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$$

利用二元集合套, 还可给出扩展原理的等价形式, 设 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ 给出 $A \in UF(X)$, 对于 $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)$, 按经典扩展原理 $f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)})$, 由于

$$(\lambda_1, \lambda_2) < (\lambda_3, \lambda_4) \Rightarrow A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \supset A_{(\lambda_3, \lambda_4)} \Rightarrow$$

$$f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \supset f(A_{(\lambda_3, \lambda_4)})$$

因此

$$\{f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)\}$$

给出一个 Y 上的集合套。

扩展原理 I 设 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$, 则 f 可

诱导出一个从 $UF(X)$ 到 $UF(Y)$ 的映射以及 $UF(Y)$ 到 $UF(X)$ 的映射,

$$f: UF(X) \rightarrow UF(Y)$$

$$A \mapsto f(A) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)});$$

$$f^{-1}: UF(Y) \rightarrow UF(X)$$

$$B \mapsto f^{-1}(B) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f^{-1}(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}).$$

定理 7 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$,

(1) 若 $A \in UF(X)$, 则

$$\left(\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \right) (y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$$

(2) 若 $B \in UF(Y)$, 则

$$\left(\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f^{-1}(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \right) (x) = B(f(x)).$$

证明

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \right) (y) = \\ & \bigvee_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} ((\lambda_1, \lambda_2) \wedge f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)})(y)) = \\ & \bigvee_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} ((\lambda_1, \lambda_2) \wedge \bigvee_{f(x)=y} A_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)) = \\ & \bigvee_{f(x)=y} \left(\bigvee_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} ((\lambda_1, \lambda_2) \wedge A_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)) \right) = \\ & \bigvee_{f(x)=y} A(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left(\bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f^{-1}(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}) \right) (x) = \\ & \bigvee_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} ((\lambda_1, \lambda_2) \wedge f^{-1}(B_{(\lambda_1, \lambda_2)})(x)) = \\ & \bigvee_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} ((\lambda_1, \lambda_2) \wedge B_{(\lambda_1, \lambda_2)}(f(x))) = B(f(x)). \end{aligned}$$

定理 8 (扩展原理 II) 设 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$, 那么

(1) 若 $A \in UF(X)$, 则

$$f(A) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f(A_{(\lambda_1, \lambda_2)});$$

(2) 若 $B \in UF(Y)$, 则

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f^{-1}(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}).$$

定理 9 (扩展原理 III) 设 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$, 那么

(1) 若 $A \in UF(X)$, 则

$$f(A) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f(H_A(\lambda_1, \lambda_2))$$

$$A_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset H_A(\lambda_1, \lambda_2) \subset A_{(\lambda_1, \lambda_2)};$$

(2) 若 $B \in UF(Y)$, 则

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in (I, I)} (\lambda_1, \lambda_2) f^{-1}(H_B(\lambda_1, \lambda_2))$$

$$B_{(\lambda_1, \lambda_2)} \subset H_B(\lambda_1, \lambda_2) \subset B_{(\lambda_1, \lambda_2)}.$$

参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338—353.
- [2] ZADEH L A. Toward a theory of fuzzy information gradulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90: 111—127.
- [3] CHEN Y H. Robust control for uncertain fuzzy systems: a linear quadratic approach[J]. Special issue on analytical issues in fuzzy control. Int. J. Fuzzy Syst. 2003, 5: 50—59.
- [4] SIRBILADZE G, SIKHARULIDZE A. Weighted fuzzy averages in fuzzy environment. I. Insufficient expert data and fuzzy averages[J]. Internat J Uncertain Fuzziness Knowledge-Based Systems, 2003, 11: 139—157.
- [5] 孟广武. 区间值 Fuzzy 集的基本理论[J]. 应用数学, 1993, 6: 212—217.

Some Basic Theorems on the Uncertain Fuzzy Set

LI Yong jin^{1,2}, ZHAO Zhi hong², GAO Dong ping¹

(1. Institute of Logic and Cognition, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Uncertain fuzzy set was raised based on the uncertainty of knowledge. They have many advantages in dealing with the imperfect and uncertain problems. The uncertain fuzzy cut set is defined; it is the generalization of fuzzy cut sets. And then various properties are discussed, in particular, the decomposition theorem, representation theorem and extension theorem about uncertain fuzzy sets are discussed.

Key words: uncertain fuzzy set; uncertain fuzzy cut set; decomposition theorem; representation theorem; extension theorem