

Lipschitz 增生算子方程带误差 Ishikawa 迭代的收敛性^{*}

黎永锦

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 设 E 是任意实 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 的增生算子, 在 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$ 和 $\limsup \beta_n L(L+1) < 1$ 的条件下研究了带误差的 Ishikawa 迭代序列收敛到方程 $Tx = f$ 的惟一解的问题。

关键词: 强增生算子; 非线性方程; Ishikawa 具误差的迭代序列

中图分类号: O117.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 04-0010-04

1 主要引理

设 E 是任意 Banach 空间, E^* 是其对偶空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示对偶配对, 称映射

$$J: E \rightarrow 2^{E^*}, J(x) = \{f \in E^*, \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}, x \in E$$

为正规对偶映射。

E 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 算子 T 称为增生的^[1], 若对任意 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \geq 0$$

增生算子 T 称为 m 增生的, 若 $R(T + \lambda I) = X$ 对某个 $\lambda > 0$ (因而对所有的 $\lambda > 0$), 这里 I 为恒等算子。

对于 Hilbert 空间 X , Chidume^[2], Dontson^[3] 研究了非线性算子方程 $f = x + Tx, x \in D(T), f \in R(T + J)$. Chidume^[4] 研究了 L_p 空间的迭代。Liu^[5] 研究了一致光滑 Banach 空间的 Ishikawa 迭代, 证明了下面的定理。

定理^[5] 设 E 是任意给定的一致光滑 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 的 m 增生算子 (Lipschitz 常数 $L \geq 1$)。又设 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中的序列, 且 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列, 满足下列条件:

① $\alpha_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), $\limsup \beta_n L(L+1) < 1$; ② $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$; ③ $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ 。

则对任意 $x_0 \in E$, 由下列带误差的 Ishikawa 迭代程序:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(f - Ty_n) + u_n, \quad y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n) + v_n$$

则当 $\{Ty_n\}$ 有界时, 序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $Tx = f$ 的惟一解。

本文将在一般的 Banach 空间中讨论 Lipschitz 的增生算子的带误差 Ishikawa 迭代的收敛性, 将条件

$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ 减弱为 $\lim v_n = 0$, 并去掉了 $\{Ty_n\}$ 有界的条件, 从而改进了文[5] 的结果。

引理 1^[5] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是 3 个非负实数序列, 满足条件 $a_{n+1} = (1 - t_n)a_n + b_n + c_n$, 其中, $0 \leq t_n \leq 1, \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty, b_n = o(t_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

引理 2^[6] 设 X 是 Banach 空间, $T: D(T) \rightarrow X$ 是 m 增生算子, 则对任意的 $f \in X$, 方程 $x + Tx = f$ 在 $D(T)$ 中有惟一解。

2 主要结果及证明

定理 1 设 E 是任意给定的 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 的增生算子 (Lipschitz 常数 $L \geq 1$)。又设

* 收稿日期: 2003-09-23

基金项目: 中山大学高等学术研究中心 (香港) 基金会资助项目 (04M10)

作者简介: 黎永锦 (1963 年生) 男, 副教授; E-mail: stslvj@zsu.edu.cn

$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中的序列, 且 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列, 满足下列条件: ① $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$; ② $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); ③ $\limsup \beta_n L(L+1) < 1$.

则对任意的 $x_0 \in E$, 具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$

$$y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n) + v_n \quad (1)$$

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(f - Ty_n) + u_n \quad (2)$$

强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的惟一解。

证明 既然 T 是 Lipschitz 增生算子, 易知 T 是 m -增生算子, 故方程 $x + Tx = f$ 有惟一解 x^* . 令 $Sx = f - Tx$, 由于 $Sx^* = f - Tx^* = x^*$, 因而 x^* 是 S 的不动点, 并存在 $j(x - y) \in J(x - y)$ 使得 $\langle Sx - Sy, j(x - y) \rangle = \langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \leq 0$, 由文[7]可知, $\langle Sx - Sy, j(x - y) \rangle \leq 0$ 当且仅当对任意 $\lambda \geq 0$, 有

$$\|x - y\| \leq \|x - y - \lambda(Sx - Sy)\|$$

对任意 $x, y \in E$ 成立。

既然 $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 算子, 由

$$\|Sx - Sy\| = \|(f - Tx) - (f - Ty)\| \leq L\|x - y\|$$

可知 S 和 T 具有相同的 Lipschitz 常数, 从而

$$y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n(Sx_n) + v_n \quad (3)$$

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(Sx_n) + u_n \quad (4)$$

由(4)式有

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n S y_n - u_n = x_{n+1} + \alpha_n(x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n S y_n - u_n) - \alpha_n S y_n - u_n = \\ &= (1 + \alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n^2 x_n - \alpha_n^2 S y_n - \alpha_n u_n - \alpha_n S y_n - u_n = \\ &= (1 + \alpha_n)x_{n+1} - \alpha_n S y_n + \alpha_n^2(x_n - S y_n) - \alpha_n u_n - u_n = \\ &= (1 + \alpha_n)x_{n+1} - \alpha_n S y_{n+1} + \alpha_n^2(x_n - S y_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - S y_n - u_n) - u_n \\ x^* &= (1 + \alpha_n)x^* - \alpha_n S x^* \end{aligned}$$

故

$$x_n - x^* = (1 + \alpha_n)(x_{n+1} - x^*) - \alpha_n(Sx_{n+1} - Sx^*) + \alpha_n^2(x_n - S y_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - S y_n - u_n) - u_n$$

从而

$$\begin{aligned} \|x_n - x^*\| &\geq \\ \|(x_{n+1} - x^*)(1 + \alpha_n) - \alpha_n(Sx_{n+1} - Sx^*) - \alpha_n^2(x_n - S y_n) - \alpha_n(Sx_{n+1} - S y_n - u_n) - \|u_n\| &= \\ (1 + \alpha_n)\|(x_{n+1} - x^*) - \left[\frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n}\right](Sx_{n+1} - Sx^*) - \alpha_n^2(x_n - S y_n) - \alpha_n(Sx_{n+1} - S y_n - u_n) - \|u_n\| &\geq \\ (1 + \alpha_n)\|(x_{n+1} - x^*)\| - \alpha_n^2\|x_n - S y_n\| - \alpha_n\|Sx_{n+1} - S y_n - u_n\| - \|u_n\| & \end{aligned}$$

因此

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \left(\frac{1}{1 + \alpha_n}\right)\|x_n - x^*\| + \alpha_n^2\|x_n - S y_n\| + \alpha_n\|Sx_{n+1} - S y_n - u_n\| + \|u_n\|$$

由

$$y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n$$

从而有

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n - x^*\| = \\ \|(1 - \beta_n)x_n - (1 - \beta_n)x^* + \beta_n(Sx_n - x^*) + v_n\| &\leq \\ (1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n\|Sx_n - Sx^*\| + \|v_n\| &\leq \\ (1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n L\|x_n - x^*\| + \|v_n\| &= (1 - \beta_n + \beta_n L)\|x_n - x^*\| + \|v_n\| \end{aligned}$$

以及

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \left(\frac{1}{1 + \alpha_n}\right)\|x_n - x^*\| + \alpha_n^2\|x_n - S y_n\| + \alpha_n\|Sx_{n+1} - S y_n - u_n\| + \|u_n\| \leq$$

$$(1 - \alpha_n + \alpha_n^2) \|x_n - x^*\| + \alpha_n^2 \|x_n - Sy_n\| + \alpha_n \|Sx_{n+1} - Sy_n - u_n\| + \|u_n\|$$

既然

$$\|x_n - Sy_n\| \leq \|x_n - x^*\| + \|Sy_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| + L \|y_n - x^*\| \leq$$

$$\|x_n - x^*\| + L(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + L \|v_n\| = (1 + L - L\beta_n + L^2 \beta_n) \|x_n - x^*\| + L \|v_n\|$$

和

$$\|Sy_n - y_n\| \leq \|Sy_n - x^*\| + \|y_n - x^*\| \leq \|Sy_n - x^*\| + \|y_n - x^*\| \leq$$

$$L \|y_n - x^*\| + \|y_n - x^*\| = (L + 1)(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + (L + 1) \|v_n\|$$

故

$$\|Sx_{n+1} - Sy_n - u_n\| \leq \|Sx_{n+1} - Sy_n\| + \|u_n\| \leq L \|x_{n+1} - y_n\| + \|u_n\| \leq$$

$$L(1 - \alpha_n) \|\beta_n(x_n - Sy_n - u_n)\| + L\alpha_n \|Sy_n - y_n\| + (L + 1) \|u_n\| \leq$$

$$L(1 - \alpha_n) (\|\beta_n(x_n - Sx_n)\| + \|u_n\|) +$$

$$L\alpha_n [(L + 1)(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + (L + 1) \|v_n\|] + (L + 1) \|u_n\| \leq$$

$$L(1 - \alpha_n) (\beta_n(L + 1) \|x_n - x^*\| + L(L + 1) \alpha_n(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| +$$

$$L(L + 1) \alpha_n \|v_n\| + (L + 1) \|u_n\| =$$

$$L(L + 1) \beta_n(1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + L(1 - \alpha_n) \|v_n\| +$$

$$L(L + 1) \alpha_n(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + L(L + 1) \alpha_n L \|v_n\| + (L + 1) \|u_n\|$$

从而

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (1 - \alpha_n + \alpha_n^2) \|x_n - x^*\| + \alpha_n^2 \|x_n - Sy_n\| + \alpha_n \|Sx_{n+1} - Sy_n - u_n\| + \|u_n\| \leq$$

$$(1 - \alpha_n + \alpha_n^2) \|x_n - x^*\| + [\alpha_n^2(1 + L - L\beta_n + L^2 \beta_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n L \|y_n\|] +$$

$$\alpha_n [L(L + 1) \beta_n(1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + L(1 - \alpha_n) \|v_n\| +$$

$$L(L + 1) \alpha_n(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + L(L + 1) \alpha_n \|v_n\| + (L + 1) \|u_n\|] + \|u_n\| =$$

$$(1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n(1 - \alpha_n)L(L + 1) \beta_n \|x_n - x^*\| +$$

$$\alpha_n^2 [\|x_n - x^*\| + (1 + L - L\beta_n + L^2 \beta_n) \|x_n - x^*\| + L(L + 1)(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\|] +$$

$$(\alpha_n L \|v_n\| + \alpha_n^2 L(L + 1) \|v_n\|) + (\alpha_n L(L + 1) \|u_n\| + \|u_n\|) \leq$$

$$(1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n L(L + 1) \beta_n \|x_n - x^*\| + \alpha_n^2(2 + L - L\beta_n + L^2 \beta_n) +$$

$$L(L + 1)(1 - \beta_n + \beta_n L) \|x_n - x^*\| + \alpha_n(L + \alpha_n L(L + 1)) \|u_n\| + (1 + \alpha_n + \alpha_n L) \|u_n\|$$

既然 $\limsup \beta_n L(L + 1) < 1$, 我们有 $0 < \lambda < 1$ 和 $0 < m < 1$, 使得 $\beta_n L(L + 1) < (1 - \lambda)m < 1$ 对任意 n 都成立。由 $\lim \alpha_n = 0$, 存在 N 使得 $n > N$ 时, 有

$$\alpha_n [(2 + L - L\beta_n + L^2 \beta_n) + L(L + 1)(1 - \beta_n - \beta_n L)] < \lambda m$$

因此

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n(1 - \lambda)m \|x_n - x^*\| + \lambda m \alpha_n \|x_n - x^*\| +$$

$$\alpha_n(L + \alpha_n L(L + 1)) \|v_n\| + (1 + \alpha_n + \alpha_n L) \|u_n\| =$$

$$[1 - (1 - m)\alpha_n] \|x_n - x^*\| + \alpha_n(L + \alpha_n L(L + 1)) \|v_n\| + (1 + \alpha_n + \alpha_n L) \|u_n\|$$

令 $t_n = (1 - m)\alpha_n$; $b_n = \alpha_n(L + \alpha_n L(L + 1)) \|v_n\|$; $c_n = (1 + \alpha_n + \alpha_n L) \|u_n\|$; $a_n = \|x_n - x^*\|$ 则

$$a_{n+1} \leq (1 - t_n) a_n + b_n + c_n$$

并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty, b_n = o(t_n), \sum_{n=0}^{\infty} c_n \leq \infty$$

因此由引理 1, 有 $\lim \alpha_n = \|x_n - x^*\|$ 从而 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的惟一解 x^* 。

类似地, 还可证明如下定理成立。

定理 2 设 E 是任意给定的 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 算子 (Lipschitz 常数 $L \geq 1$), 并且 T 满足

$$\langle Tx - Ty, J(x - y) \rangle \geq \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

又设 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中的序列, 且 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列, 满足下列条件: ① $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$; ② $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); ③ $\limsup \beta_n L(L+1) < 1/2$.

则对任意的 $x_0 \in E$, 具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的惟一解.

致谢：作者非常感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

参考文献：

[1] BOROWDER F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J] . Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 875—882.

[2] CHIDUME C E. An approximation method for monotone operator[J] . J Austral Math Soc(A), 1986, 41: 59—63.

[3] DOTSON W G. An iterative process for nonlinear monotonic nonexpansive operators in Hilbert space[J] . Math Comp, 1978, 32: 223—225.

[4] CHIDUME C E. The iterative solution of the equation $f= x + Tx$ for a monotone operator T in Lp space[J] . J Math Anal Appl, 1986, 166: 531—537.

[5] LIU L S. Ishikawa-type and Mann type iterative process with errors for constructing solutions of nonlinear equations involving m-accretive operators in Banach spaces [J] . Nonlinear Analysis, 1998, 34: 307—317.

[6] ZHU L C. Iterative solution of nonlinear equations invoiving m accretive operators in Banach spaces[J] . J Math Anal Appl, 1994, 188: 410—416.

[7] KATO T. Nonlinear semi groups and evolutions equations [J] . J Math Soc Japan, 1964, 19: 508—520.

The Convergence of Ishikawa Iterative Sequence with Errors for
Lipschitz Accretive Operators in Banach Spaces

LI Yong jin

(Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The iterative solution is studied for equation $x+Tx=f$ with an accretive Lipschitz operator in arbitrary real Banach spaces, and some previous results are improved.

Key words: accretive operator; nonlinear equation; Ishikawa iterative sequences with errors