

计算机图形学教学疑点剖析^{*}

彭 青 玉

(暨南大学计算机科学系, 广东 广州 510632)

摘 要: 针对大学本科计算机图形学的 Phong 模型教学中遇到的难点, 采用了球面三角方法进行描述、分析, 并给出了问题的数值解答。

关键词: 计算机图形学教学; Phong 模型; 球面几何解释

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) S1-0158-03

大学本科计算机专业教学中一般都开设《计算机图形学》课程。采用了 Hearn 等著^[1]《计算机图形学》作为教材。其光照模型的内容涉及到镜面反射中的 Phong 模型。

原始的 Phong 模型可表示为,

$$I_{\text{spec}} = w(\theta) I_l \cos^n \phi \quad (1)$$

其中, θ 为入射角 $w(\theta)$ 为镜面反射系数, I_l 为光源强度, ϕ 为观察方向 V 与镜面反射方向 R 的夹角(如图 1), n_s 称为镜面反射参数。为了简化该模型, 对多种镜面反射材料都可以用一个恒定的镜面反射系数 k_s 来取代 $w(\theta)$ 。此外又可用单位矢量的点积来代替余弦函数 $\cos \phi$, 因而, 式 (1) 成为

$$I_{\text{spec}} = k_s I_l (V \cdot R)^{n_s} \quad (2)$$

具体地, V 、 R 、镜面法线方向 N 和光源方向 L 有图 1 所示的关系,

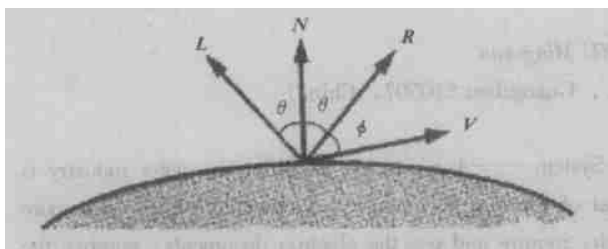


图 1 Phong 模型中基本矢量的关系图

Fig 1 Relationship of the fundamental vectors in the Phong model

注意, V 不一定总在 R 和 N 构成的平面上。

为了进一步简化式 (2), 使用 L 和 V 之间的半角矢量 H 来计算镜面反射光强 (见图 2)。具体

地, 单位化的 H 可由下式计算:

$$H = \frac{L + V}{|L + V|}$$

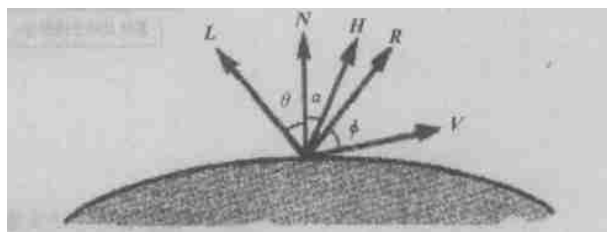


图 2 在图 1 的基础上增加半角矢量后的关系图

Fig 2 Halfway vector H along the bisector of the angle between L and V

则式 (2) 再一次简化为,

$$I_{\text{spec}} = k_s I_l (N \cdot H)^{n_s} \quad (3)$$

明显地, 用 $(N \cdot H)$ 代替 $(V \cdot R)$ 后, 光度的数值大小发生了变化。学生对用式 (3) 求解反射光强觉得不严谨, 而本教材和其他教材^[3]也没有 (令人信服的) 解释。这时, 我们可以这样解释, 因为 Phong 模型从本质上是一种经验模型, 而不是客观的物理定律, 只不过人们发现用 Phong 模型来描述实际情况比较接近真实情况罢了。另外, $(N \cdot H)$ 代替 $(V \cdot R)$ 后的变化可以通过调整来适当补偿。

教材进一步指出: 若矢量 V , L 和 R (及 N) 共面时, 角 α 的值为 $\phi/2$, 当 V , L 和 N 不共面时, $\alpha > \phi/2$ 。对 V , L 和 R 和共面时的等式关系: $2\alpha = \phi$, 只要利用反射定律和半角关系则容易证明。但 V , L 和 R 和不共面时的结果, 学生们都迷惑不解。

上述迷惑是 V , L 和 R (及 N) 现在不再是同

* 收稿日期: 2004-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10273015)

作者简介: 彭青玉 (1963 年生), 男, 副研究员; E-mail: pengqingyu@163.net

一平面上的矢量了, 而学生们又没有很好的数学工具来处理任意空间中的矢量关系, 这就造成了他们在理解上的困难。

本文尝试利用球面三角学的知识来解答这一难点。对于球面三角学知识, 普通大学计算机本科专业的学生通常都不作要求, 我们在正文中给出一些主要的关系并列参考文献。本文的内容是这样安排的。第1部分简单说明解决本问题所需的球面三角学公式, 第2部分是该问题的球面三角关系。由于问题的复杂性, 第3部分给出了具体的数值求解结果并以图示方式表明定性的结论。最后一部分是结果和结论。

1 球面三角学概述

如图3所示, A, B, C 为单位球面上的3个点同时也表示为对应的球面角。 a, b, c 为该球面上分别连接 BC, AC 和 AB 的大圆在球面的弧长, 构成球面三角形 $\triangle ABC$ 。其角 A, B, C 和边长 a, b, c 有如下的边的余弦公式关系:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (4)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (5)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (6)$$

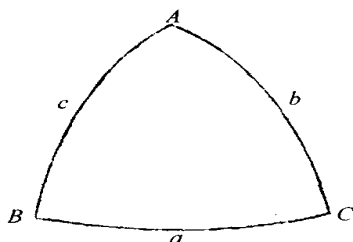


图3 一般球面三角形中边角关系

Fig. 3 Relationship between the sides and angles in sphere triangle

正如平面三角学中有诸多的基本关系一样, 在球面三角学中也有许多其他的边角关系, 详细公式或关系可以参考有关文献[2]。

2 求解问题的球面关系

图4表示了求解问题在球面上的对应关系。这里我们忽略矢量的标志(它们可由球心到球面上各点构成的矢量来表示)。其中, L, N, R 在同一大圆上, 且 L, R 关于 N 对称, L, R 与 N 的夹角皆为 θ (入射角与反射角相等)。

另一方面, V (V 方向与球面之交点) 即为观察方向, 其与 R 的夹角为 ϕ 。在球面上体现为 R 与 V 的大圆的弧长为 ϕ 。而 H 为 L 与 V 所连大圆

的中点, 连接 N 与 H 的大圆即为 N 与 H 之夹角 α 。

因为 V 与 R 之夹角 ϕ 即使一定, 但因为 V 与 R 的大圆在空间可以任意取向, 我们可以假定 NR 与 VR 之间的夹角 ξ 为变量。

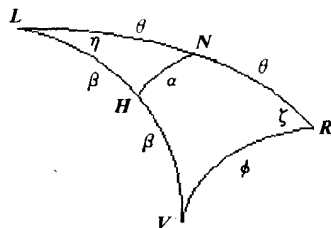


图4 考虑到半角矢量后, 求解问题的球面关系图

Fig. 4 The relationship in a sphere when the half-way vector is taken into account

作为一个函数, 设 LV 的球面边长为 2β , H 为 LV 大圆弧长的中点, 还设 LN 与 LH 之间的夹角为 η 。在球面三角形 LRV 中, 根据边的余弦公式有

$$\cos 2\beta = \cos 2\theta \cos \phi + \sin 2\theta \sin \phi \cos \xi \quad (7)$$

由此, 可由 θ, ϕ, ξ 求得 β , 接着, 在球面三角形 LRV 中再一次利用边的余弦公式有,

$$\cos \phi = \cos 2\theta \cos 2\beta + \sin 2\theta \sin 2\beta \cos \eta \quad (8)$$

由此可以求得 η

$$\cos \eta = \frac{\cos \phi - \cos 2\theta \cos 2\beta}{\sin 2\theta \sin 2\beta} \quad (9)$$

最后, 在球面三角形 LNH 中, 再一次应用边的余弦公式可求得 α 角:

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos \eta \quad (10)$$

因为 ϕ, θ 和 ξ 与 α 有着非常复杂的函数关系, 其解析式冗长。我们拟采取计算机数值计算的方法来分析问题。

3 数值求解

可以由给定的 ϕ, θ , 由式 (7) ~ (10) 计算在不同自变量 ξ 的条件下 $2\alpha - \phi$ 随 ξ 的变化关系。图5表示了 $\theta = 60^\circ$, 分别取 $\phi = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ 的条件下由数值计算分别得到的 $2\alpha - \phi$ 与 ξ 的变化图线。

4 结果和结论

由图5可以得到如下结论:

(1) 通常情况下, $2\alpha - \phi > 0$, 而只有当 $\xi = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ 时, 等式 $2\alpha - \phi = 0$ 才成立, 这些情况对应于, L, N 和 V 的共面;

(2) 当 ξ 在 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 附近时, $2\alpha - \phi$ 取极大值;

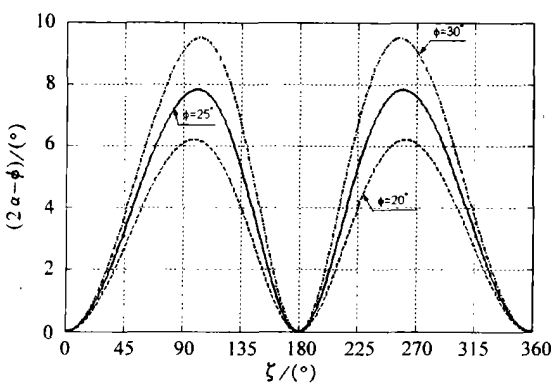


图 5 $\phi=20^\circ$ 、 25° 和 30° 时 $2\alpha-\phi$ 随 ξ 的变化关系

Fig 5 The relationship between $2\alpha-\phi$ and ξ
when $\phi=20^\circ$ 、 25° and 30°

(3) 在相同 ξ 的情况下, ϕ 越大, $2\alpha-\phi$ 越大。

参考文献:

[1] HEARN D, BAKERM P. 计算机图形学[M] . 蔡士杰, 等译. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2002.
[2] 《数学手册》编写组. 数学手册[M] . 北京: 高等教育出版社, 1979.
[3] 孙家广. 计算机图形学[M] . 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 1999.

Explanation for a Difficulty in Teaching of Computer Graphics

PENG Qing yu

(Department of Computer Science, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: When a simplified Phong model is obtained by using the halfway vector H between L (the unit vector directed toward the point light source) and V (the unit vector pointing to the viewer from the surface position) , there is a general relationship that the angle α between H and N (the unit normal surface vector) and the angle ϕ between R (the unit vector in specular reflection direction) and V : $2\alpha \geq \phi$. A geometric explanation is made in Sphere Triangle, and correspondingly numerical experiment is done to show clearly this relationship.

Key words: teaching of computer graphics; Phong model; geometric explanation in sphere triangle